

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΗ ΕΚΘΕΣΗ:

ΣΕΙΣΜΙΚΗ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑ ΚΑΙ ΕΝΤΑΣΗ
ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ:

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΜΙΧ. Ν. ΦΑΡΔΗΣ

ΣΥΝΕΡΓΑΤΕΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ:

Α-Μ. Ο. ΣΚΟΥΤΕΡΟΠΟΥΛΟΥ

Σ.Ν. ΜΠΟΥΣΙΑΣ

ΠΑΤΡΑ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 1986



1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τόσο στην Ελλάδα όσο και διεθνώς, τα κλιμακοστάσια κτιρίων από οπλισμένο σκυρόδεμα εμφανίζουν μεγαλύτερη συχνότητα σεισμικών βλαβών από τα λοιπά φέροντα στοιχεία της κατασκευής. Εξαίρεση αποτελούν τα κλιμακοστάσια που στηρίζονται συνεχώς σε διατμητικά τοιχώματα (π.χ., αυτά που περικλείονται από πυρήνα τοιχωμάτων), η μεγάλη δυσκαμψία των οποίων προστατεύει, σε περίπτωση σεισμού, τις βαθμιδοφόρους και τα τυχόν πλατύσκαλα του κλιμακοστασίου από σημαντικές παραμορφώσεις (7). Κλιμακοστάσια, όμως, μέσα σε πυρήνα τοιχωμάτων χρησιμοποιούνται, τόσο στην Ελλάδα, όσο και διεθνώς, κυρίως σε κτίρια με μεγάλο αριθμό ορόφων. Σε κτίρια μικρού ή μέσου ύψους οι σκάλες στηρίζονται (με μονολιθική σύνδεση) στις πλάκες των ορόφων, και σε υποστυλώματα και δοκούς (συχνά κεκλιμένες) του πλαισιακού δομικού συστήματος του κτιρίου. Η μονολιθική αυτή σύνδεση της σκάλας με στοιχεία του δομικού συστήματος, την μετατρέπει σε τμήμα του συστήματος αυτού. Σαν αποτέλεσμα η δυσκαμψία του δομικού συστήματος αυξάνεται τοπικά, ιδιαίτερα στην οριζόντια διεύθυνση, οι δε σκάλες υπόκεινται σε σημαντική ένταση σε περίπτωση σεισμού. Η τοπική αύξηση της δυσκαμψίας, αλλά και η πρόσθετη σεισμική ένταση στη σκάλα και στα στοιχεία που τη στηρίζουν, είναι συνήθως ιδιαίτερα σημαντική όταν η σκάλα στηρίζεται άμεσα ή έμμεσα (μέσω δοκών) στο ενδιάμεσο του ύψους υποστυλωμάτων (3). Στις περιπτώσεις αυτές όχι μόνο η σεισμική ένταση είναι τοπικά σημαντική (ιδιαίτερα στα υποστυλώματα), αλλά και η στατική λειτουργία είναι τοπικά (δηλ. στην περιοχή της σκάλας) πιά σύνθετη. Σαν αποτέλεσμα, για μία σχετικά αξιόπιστη αποτίμηση και της ελαστικής ακόμη συμπεριφοράς του δομικού συστήματος στην περιοχή της σκάλας, είναι σχεδόν απαραίτητη η θεώρηση της σκάλας και των στοιχείων που τη στηρίζουν σαν ένα ενιαίο δομικό σύστημα στο χώρο. Αν, αντίθετα, η σκάλα στηρίζεται (με μονολιθική σύνδεση) μόνο στις πλάκες των ορόφων που συνδέει, η στατική λειτουργία είναι πιά απλή και "καθαρή", και η συμπεριφορά ευκολότερα αποτιμήσιμη με απλούστερες μεθόδους. Μία σκάλα που στηρίζεται μόνο στα άκρα της αποτελεί μία μεμονωμένη δεσμική ράβδο, η οποία εμποδίζει, σε κάποιο βαθμό, τη σχετική οριζόντια μετακίνηση των ορόφων που συνδέει. Η τοπική αύξηση της οριζόντιας δυσκαμψίας του συστήματος είναι, στην περίπτωση αυτή, όχι μόνο ευκολότερα αποτιμήσιμη, αλλά και σημαντικά μικρότερη, σε σύγκριση με την αντίστοιχη για ενδιάμεση στήριξη της σκάλας σε άλλα στοιχεία του δομικού συστήματος.

Η επιρροή των κλιμάκων στη σεισμική συμπεριφορά κτιρίων, μελετήθηκε αρχικά για ευθύγραμμες σκάλες (1). Η αύξηση της πλευρικής δυσκαμψίας κατασκευών, λόγω της παρουσίας ευθυγράμμων κλιμάκων με στήριξη μόνο στα άκρα, είναι δυνατόν να υπολογισθεί αναλυτικά, αλλά προκύπτει, γενικά, σημαντική σε μέγεθος (1). Καμπύλες στο χώρο σκάλες, με στήριξη μόνο στα άκρα, έχουν, κατά κανόνα, μικρότερη δυσκαμψία από τις ευθύγραμμες (8). Για το λόγο αυτό, αλλά και επειδή καμπύλες σε κάτοψη σκάλες συνηθίζονται στην Ελληνική πρακτική, λόγω των λειτουργικών τους πλεονεκτη-

μάτων, παρουσιάζεται εδώ για τις σκάλες αυτές μία αναλυτική μέθοδος υπολογισμού του πλήρους μητρώου δυσκαμψίας, και της έντασης που αναπτύσσεται σε κάθε θέση της σκάλας από δεδομένες σχετικές μετακινήσεις των άκρων της. Η μεθοδολογία αυτή δίνει τη δυνατότητα να περιληφθεί η σκάλα σαν ένα καμπύλο-στο-χώρο στοιχείο, σε ένα προσομοίωμα του δομικού συστήματος στο χώρο, με σκοπό τον "ακριβή" υπολογισμό της ελαστικής συμπεριφοράς του συστήματος: σκάλα - υπόλοιπο δομικό σύστημα, για οποιαδήποτε φόρτιση. Επιπλέον, δίνονται εδώ, υπό μορφή διαγραμμάτων, τα πιο σημαντικά στοιχεία του μητρώου δυσκαμψίας, σαν συναρτήσεις των γεωμετρικών παραμέτρων της σκάλας. Τα διαγράμματα αυτά επιτρέπουν, αφενός μεν την επιλογή της γεωμετρίας της σκάλας έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η δυσκαμψία της σε οριζόντια διεύθυνση, αφετέρου δε μία απλούστατη προσεγγιστική θεώρηση της σκάλας σαν "ισοδύναμο" υποστύλωμα.

Κλείνοντας την εισαγωγή αυτή πρέπει να επισημάνουμε ότι στήριξη των καμπύλων στο χώρο κλιμάκων μόνο στα άκρα τους δεν συνηθίζεται στην Ελληνική πρακτική, για δύο πιθανούς λόγους: Πρώτον, μία τέτοια στήριξη της σκάλας μπορεί να θεωρείται "ανασφαλής", όσο αφορά τη λειτουργία της σκάλας για κατακόρυφα φορτία. Δεύτερον, ο τρόπος ακριβούς υπολογισμού της λόγω κατακορύφων φορτίων έντασης μίας τέτοιας σκάλας είναι σχετικά επίπονος, και άγνωστος στο μέσο μηχανικό. Ως προς το πρώτο, πρέπει να τονισθεί ότι, αντίθετα με την επικρατούσα εντύπωση, οι καμπύλες στο χώρο σκάλες με στήριξη μόνο στα άκρα έχουν ιδιαίτερη ικανότητα ανάληψης κατακορύφων φορτίων και μεταφοράς τους στα άκρα τους, επειδή, σαν φορείς στο χώρο, επιστρατεύουν και τις 6 συνιστώσες της έντασης για την ανάληψη εξωτερικών φορτίων. Ως προς το δεύτερο, πρέπει να αναφερθεί ότι, τουλάχιστον για τους τύπους κλιμάκων που εξετάζονται εδώ, υπάρχουν στη βιβλιογραφία, Ελληνική και διεθνή, (π.χ., 5, 6, 8), ακριβείς ελαστικές μέθοδοι υπολογισμού των εντατικών μεγεθών, λόγω ομοιόμορφου κατακόρυφου φορτίου, για πάκτωση σε κάμψη και στρέψη και στα 2 άκρα.

2. ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

A	: διατομή πλάκας σκάλας
\underline{A}	: Μητρώο που συνδέει τα \underline{P}' και P
b	: πλάτος σκάλας
C	: Πολική ροπή αδράνειας διατομών σκάλας
E	: Μέτρο Ελαστικότητας
\underline{E}	: Μητρώο Ευκαμψίας, που συνδέει τα \underline{P} και \underline{U} για $\underline{U}' = \underline{Q}$
f_{ij}	: Στοιχείο ij του μητρώου \underline{E}
G	: Μέτρο διάτμησης
H	: Ύψος ορόφου
h	: ύψος διατομής σκάλας, κάθετα στη διεύθυνση του άξονα

I_x, I_y	: κύριες ροπές αδράνειας διατομής σκάλας ($bh^3/12, hb^3/12$)
κ	: Μητρώο δυσκαμψίας σκάλας, διαστάσεων 12×12
κ_{11}	: Υπομητρώο του κ , διαστάσεων 6×6 . Αντίστροφο του κ
k_{ij}	: Στοιχείο ij του κ
k	: Συντελεστής διατμητικών όρων, ίσος με 1,2
l	: Μήκος ευθυγράμμων τμημάτων άξονα σκάλας
M_i, M'_i	: Επικόμβιες ροπές ως προς άξονες $Ox_i, O'x'_i$, στην κορυφή και βάση της σκάλας
M_x, M_y	: Καμπτική ροπή στη διατομή της σκάλας ως προς άξονες Ox, Oy , αντίστοιχα.
N	: Αξονική δύναμη στη διατομή της σκάλας
P_i, P'_i	: Επικόμβιες δυνάμεις κατά τους άξονες $Ox_i, O'x'_i$, στην κορυφή και τη βάση της σκάλας
$\underline{P}, \underline{P}'$: Μητρώο-στήλη επικομβίων δυνάμεων, στην κορυφή και τη βάση της σκάλας
r	: Ακτίνα κυκλικών τμημάτων άξονα σκάλας, σε κάτοψη
T	: Στρεπτική ροπή στη διατομή της σκάλας
$\underline{U}, \underline{U}'$: Μητρώο-στήλη επικομβίων μετακινήσεων, στην κορυφή και τη βάση της σκάλας.
u_i, u'_i	: Επικόμβιες μεταθέσεις, κατά τους άξονες Ox_i , και $O'x'_i$, στην κορυφή και τη βάση της σκάλας
V_x, V_y	: Τέμνουσες δυνάμεις στη διατομή της σκάλας, κατά τους άξονες Ox, Oy .
x	: Οριζόντια απόσταση διατομής στο πάνω ευθύγραμμο τμήμα σκάλας τύπου A, ή στο κεντρικό σκάλας τύπου B, από την κορυφή του ευθύγραμμου τμήματος.
x'	: Απόσταση διατομής στο κάτω ευθύγραμμο τμήμα σκάλας τύπου A, από τη βάση της σκάλας
a	: Οριζόντια απόσταση άκρων άξονα σκάλας, σε σκάλες τύπου A και B
a_1, a_2	: Οριζόντιες αποστάσεις άκρων ελικοειδούς σκάλας, κατά τους άξονες Ox_1, Ox_2
θ	: Γωνία άξονα σκάλας ως προς το οριζόντιο επίπεδο
θ_i, θ'_i	: Επικόμβιες στροφές περί άξονες $Ox_i, O'x'_i$, στην κορυφή και τη βάση της σκάλας
λ	: $1/r$
ν	: Λόγος Poisson
ω	: Πολική γωνία διατομής της ελικοειδούς σκάλας, ή του κεντρικού ημικυκλίου σκάλας τύπου A, ή του πάνω τεταρτοκυκλίου σκάλας B, και της κορυφής του αντιστοίχου κυκλικού τμήματος, ή μεταξύ διατομής του κάτω τεταρτοκυκλίου σκάλας τύπου B και της βάσης της
φ_0	: Μισό της συνολικής γωνίας ελικοειδούς σκάλας σε κάτοψη

3. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ

Η γεωμετρία των 3 τύπων κλιμάκων που εξετάζονται εδώ φαίνεται στο σχήμα 1. Και οι 3 τύποι έχουν σταθερή κλίση άξονα ως προς την οριζόντιο, θ , και σταθερό πλάτος, b , και ύψος διατομής, h . Στον πρώτο τύπο, τον τύπο Α, ο άξονας αποτελείται σε κάτοψη από ένα κεντρικό ημικύκλιο με ακτίνα r , και 2 ακραία ευθύγραμμα τμήματα, μήκους l . Στον δεύτερο, τον τύπο Β, η κάτοψη του άξονα έχει ένα κεντρικό ευθύγραμμο τμήμα, μήκους l , και 2 ακραία τεταρτοκύκλια, ακτίνας r . Η τρίτη μορφή σκάλας είναι ελικοειδής, με ακτίνα r και συνολική γωνία σε κάτοψη $2\varphi_0$. Το ύψος ορόφου, H , και η κλίση θ συνδέονται με τα λοιπά γεωμετρικά στοιχεία με τις διαστάσεις του άξονα σε κάτοψη ως εξής:

$$\frac{H}{\tan\theta} = \begin{cases} 2l + \pi r & \text{για σκάλα τύπου Α} & (1) \\ l + \pi r & \text{για σκάλα τύπου Β} & (2) \\ 2\varphi_0 r & \text{για ελικοειδή} & (3) \end{cases}$$

Θεωρούμε 2 παράλληλα συστήματα συντεταγμένων, $Ox_1x_2x_3$ στην κορυφή του άξονα, και $O'x'_1x'_2x'_3$ στη βάση του, (Σχήμα 2), με τους άξονες Ox_3 , $O'x'_3$ κατακόρυφους, τον Ox_2 οριζόντιο και κάθετο στον άξονα της σκάλας στην κορυφή του, και τον Ox_1 οριζόντιο και μέσα στο κατακόρυφο επίπεδο που εφάπτεται του άξονα της σκάλας στην κορυφή του. Τα μητρώα-στήλες των 6 επικομβίων δυνάμεων στην κορυφή και τη βάση του άξονα:

$$\underline{P} = [P_1 \ P_2 \ P_3 \ M_1 \ M_2 \ M_3]^T \quad (4)$$

$$\underline{P}' = [P'_1 \ P'_2 \ P'_3 \ M'_1 \ M'_2 \ M'_3]^T \quad (5)$$

και τα αντίστοιχα μητρώα-στήλες των επικομβίων μετακινήσεων:

$$\underline{U} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T \quad (6)$$

$$\underline{U}' = [u'_1 \ u'_2 \ u'_3 \ \theta'_1 \ \theta'_2 \ \theta'_3]^T \quad (7)$$

αναφέρονται σ'αυτά τα συστήματα αξόνων (Σχήμα 2). Οι συντεταγμένες της κορυφής O του άξονα, στο σύστημα $O'x'_1x'_2x'_3$ είναι $(0, a, H)$ για τις σκάλες τύπου Α και Β, ή (a_1, a_2, H) για την ελικοειδή, όπου $a = \pm 2r$ για σκάλες τύπου Α ή $a = \pm (1+2r)$ για τύπου Β, $a_1 = -r\sin 2\varphi_0$, και $a_2 = \pm (1-\cos 2\varphi_0)$. Το πρόσημο $+$ ισχύει για "δεξιόστροφες" σκάλες, με φορά ανόδου αντίθετη με αυτήν των δεικτών του ωρολογίου (δηλ. η γωνία από τη βάση προς την κορυφή της σκάλας είναι αντίθετη της φοράς των δεικτών του ωρολογίου), και το $-$ για "αριστερόστροφες", δηλ με φορά ανόδου κατά τους δείκτες του ωρολογίου.

Στην τυχούσα κάθετη στον άξονα διατομή της σκάλας εισάγουμε το Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$, με άξονα Ox οριζόντιο, Oz εφαπτομενικό στον άξονα της σκάλας,

και Oy στο κατακόρυφο επίπεδο που περιέχει τον Oz (Σχήμα 2). Όπως στην Τεχνική θεωρία της Κάμψης, αγνοούμε τις τάσεις σ_x και σ_y , και υποθέτουμε ότι κατά την παραμόρφωση η διατομή παραμένει επίπεδη, αλλά όχι αναγκαστικά κάθετη στον Oz (δηλ. υποθέτουμε επίπεδη κατανομή των τάσεων σ_z στο επίπεδο Oxy , αλλά λαμβάνουμε υπ'όψη διατμητικές παραμορφώσεις στα επίπεδα Oxz και Oyz). Οι κύριες ροπές αδράνειας της διατομής είναι $I_x = bh^3/12$, και $I_y = hb^3/12$, ενώ η στρεπτική δυσκαμψία GC μπορεί να προσεγγισθεί, για τιμές του h/b μεταξύ 0,05-0,30, ως εξής: (5):

$$GC = \frac{2EI_x I_y}{I_x + I_y} \quad (8)$$

Η εντατική κατάσταση στην τυχούσα διατομή της σκάλας δίνεται από τα 6 εντατικά μεγέθη που φαίνονται στο Σχήμα 3, με τις θετικές φορές τους: 1) Καμπτική ροπή M_x , ως προς Ox , θετική για εφελκυσμό της κάτω επιφάνειας· 2) Καμπτική ροπή M_y ως προς Oy , θετική για εφελκυσμό της εσωτερικής περιδιάς· 3) Στρεπτική ροπή T , θετική όταν το διάνυσμά της διευθύνεται προς το εσωτερικό του τμήματος της σκάλας στο οποίο ανήκει η εξεταζόμενη διατομή, για "δεξιόστροφες" σκάλες, ή προς το εξωτερικό, για "αριστερόστροφες"· 4) Αξονική δύναμη N , θετική για εφελκυσμό· 5) Τέμνουσα V_x κατά τον Oy (δηλ., συνοδεύουσα τη M_x), θετική αν αυξάνει αλγεβρικά τη M_x από την κορυφή προς τη βάση της σκάλας· 6) Τέμνουσα V_y , κατά τον Ox (δηλ., συνοδεύουσα τη M_y), θετική αν αυξάνει αλγεβρικά τη M_y από την κορυφή προς τη βάση της σκάλας.

4. ΕΝΤΑΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ

Από τις συνθήκες ισορροπίας προκύπτουν τα 6 εντατικά μεγέθη στην τυχούσα διατομή της σκάλας, συναρτήσει του μητρώου-στήλη των επικομβίων δυνάμεων, στην κορυφή της. Για "δεξιόστροφες" σκάλες έχουμε.

Στο πάνω ευθύγραμμο τμήμα σκάλας τύπου Α, σε οριζόντια απόσταση x από την κορυφή:

$$\begin{bmatrix} N \\ V_x \\ V_y \\ M_x \\ M_y \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x \tan\theta & 0 & x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{x}{\cos\theta} & 0 & -\sin\theta & 0 & -\cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

και στο κάτω ευθύγραμμο τμήμα της, σε οριζόντια απόσταση x' από τη βάση:

$$\begin{bmatrix} N \\ V_x \\ V_y \\ M_x \\ M_y \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(2l-x'+\pi r)\tan\theta & 0 & -x' & 0 & -1 & 0 \\ 2r\cos\theta & x'\cos\theta - (2l+\pi r)\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} & 2r\sin\theta & \sin\theta & 0 & -\cos\theta \\ 2r\sin\theta & (2l+\pi r)\sin\theta & -2r\cos\theta & -\cos\theta & 0 & -\sin\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Στο κεντρικό ημικύκλιο σκάλας τύπου Α, σε πολική γωνία φ από την ένωση του ημικυκλίου με το πάνω ευθύγραμμο τμήμα:

$$\begin{bmatrix} N \\ V_x \\ V_y \\ M_x \\ M_y \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi & \cos\varphi \\ (l+r\varphi)\cos\varphi\tan\theta & -(l+r\varphi)\sin\varphi\tan\theta \\ [r(1-\cos\varphi)+(l+r\varphi)\sin\varphi\tan^2\theta]\cos\theta & [l+r\sin\varphi+(l+r\varphi)\cos\varphi\tan^2\theta]\cos\theta \\ [r(1-\cos\varphi)-(l+r\varphi)\sin\varphi]\sin\theta & [l+r\sin\varphi-(l+r\varphi)\cos\varphi]\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ r\sin\varphi+l\cos\varphi & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ [l\sin\varphi+r(1-\cos\varphi)]\sin\theta & -\cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & -\cos\theta \\ -[l\sin\varphi+r(1-\cos\varphi)]\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Στο πάνω και κάτω τεταρτοκύκλιο σκάλας τύπου Β, σε πολική γωνία φ από την κορυφή ή τη βάση της, έχουμε αντίστοιχα:

$$\begin{bmatrix} N \\ V_x \\ V_y \\ M_x \\ M_y \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & \sin\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ r(\varphi\cos\varphi)\tan\theta & -r(\varphi\sin\varphi)\tan\theta & r\sin\varphi \\ r(1-\cos\varphi+(\varphi\sin\varphi)\tan^2\theta)\cos\theta & r(\sin\varphi+\varphi\cos\varphi\tan^2\theta)\cos\theta & r(1-\cos\varphi)\sin\theta \\ r(1-\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)\sin\theta & r(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)\sin\theta & -r(1-\cos\varphi)\cos\theta \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N \\ V_x \\ V_y \\ M_x \\ M_y \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta \\ -\cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \\ -(1+(\pi-\varphi)r)\cos\varphi\tan\theta & -(1+(\pi-\varphi)r)\sin\varphi\tan\theta \\ [1+r(1+\cos\varphi)+\sin\varphi(1+(\pi-\varphi)r)\tan^2\theta]\cos\theta & [r\sin\varphi-(1+(\pi-\varphi)r)\cos\varphi\tan^2\theta]\cos\theta \\ [1+r(1+\cos\varphi)-\sin\varphi(1+(\pi-\varphi)r)]\sin\theta & [r\sin\varphi+(1+(\pi-\varphi)r)\cos\varphi]\sin\theta \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (r+1)\sin\varphi & \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ [r+(r+1)\cos\varphi]\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & -\cos\theta \\ -[r+(r+1)\cos\varphi]\cos\theta & -\cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}$$

Και στο κεντρικό ευθύγραμμο τμήμα της, σε οριζόντια απόσταση x από την ένωση του ευθύγραμμου τμήματος με το πάνω τεταρτοκύκλιο:

$$\begin{bmatrix} N \\ V_x \\ V_y \\ M_x \\ M_y \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(x + \frac{\pi r}{2})\tan\theta & r+x & 1 & 0 & 0 \\ \frac{x}{\cos\theta} + r(1 + \frac{\pi}{2}\tan^2\theta)\cos\theta & r\cos\theta & r\sin\theta & 0 & \sin\theta & -\cos\theta \\ r(1 - \frac{\pi}{2})\sin\theta & r\sin\theta & -r\cos\theta & 0 & -\cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} N \\ V_x \\ V_y \\ M_x \\ M_y \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & \sin\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ r\varphi\cos\varphi\tan\theta & -r\varphi\sin\varphi\tan\theta & r\sin\varphi \\ r(1 - \cos\varphi + \varphi\sin\varphi\tan^2\theta)\cos\theta & r(\sin\varphi + \varphi\cos\varphi\tan^2\theta)\cos\theta & r(1 - \cos\varphi)\sin\theta \\ r(1 - \cos\varphi - \varphi\sin\varphi)\sin\theta & r(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)\sin\theta & -r(1 - \cos\varphi)\cos\theta \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}$$

Σε αριστερόστροφες σκάλες, οι άρτιες στήλες (δηλ. η 2η, 4η και 6η) των μητρώων στις σχ.(9)-(15) αλλάζουν πρόσημο.

Και στο κεντρικό ευθύγραμμο τμήμα της, σε οριζόντια απόσταση x από την ένωση του ευθύγραμμου τμήματος με το πάνω τεταρτοκύκλιο:

$$\begin{bmatrix} N \\ V_x \\ V_y \\ M_x \\ M_y \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(x+\frac{\pi r}{2})\tan\theta & r+x & 1 & 0 & 0 \\ \frac{x}{\cos\theta} + r(1+\frac{\pi}{2}\tan^2\theta)\cos\theta & r\cos\theta & r\sin\theta & 0 & \sin\theta & -\cos\theta \\ r(1-\frac{\pi}{2})\sin\theta & r\sin\theta & -r\cos\theta & 0 & -\cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Σε δεξιόστροφες ελικοειδείς σκάλες, σε πολική γωνία φ από τη κορυφή, είναι:

$$\begin{bmatrix} N \\ V_x \\ V_y \\ M_x \\ M_y \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & \sin\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ r\varphi\cos\theta\tan\theta & -r\varphi\sin\theta\tan\theta & r\sin\theta \\ r(1-\cos\varphi+\varphi\sin\theta\tan^2\theta)\cos\theta & r(\sin\varphi+\varphi\cos\theta\tan^2\theta)\cos\theta & r(1-\cos\varphi)\sin\theta \\ r(1-\cos\varphi-\varphi\sin\theta)\sin\theta & r(\sin\theta-\varphi\cos\theta)\sin\theta & -r(1-\cos\varphi)\cos\theta \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}$$

Σε αριστερόστροφες σκάλες, οι άρτιες στήλες (δηλ. η 2η, 4η και 6η) των μητρώων στις σχ.(9)-(15) αλλάζουν πρόσημο.

5. ΜΗΤΡΩΑ ΕΥΚΑΜΨΙΑΣ ΚΑΙ ΔΥΣΚΑΜΨΙΑΣ ΤΗΣ ΣΚΑΛΑΣ

Το στοιχείο f_{ij} του μητρώου ευκαμψίας \underline{F} , που συνδέει τα \underline{P} και \underline{U} στην κορυφή για $\underline{U}'=0$ στη βάση, υπολογίζεται με το θεώρημα Castigliano:

$$f_{ij} = \int \left(\frac{M_{xi} M_{xj}}{EI_x} + \frac{M_{yi} M_{yj}}{EI_y} + \frac{T_i T_j}{GC} + \frac{N_i N_j}{EA} + k \frac{V_{xi} V_{xj}}{GA} + k \frac{V_{yi} V_{yj}}{GA} \right) ds \quad (16)$$

όπου $ds = dx/\cos\theta$ στα ευθύγραμμα τμήματα, και $ds = r d\phi/\cos\theta$ στα κυκλικά, και M_{xi} , M_{yj} , T_i , N_i , V_{xi} , V_{yj} , ή M_{xj} , M_{yj} , T_j , N_j , V_{xj} , V_{yj} , είναι τα εντατικά μεγέθη λόγω μοναδιαίας τιμής του στοιχείου i , ή του στοιχείου j του \underline{P} , αντίστοιχα. Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων της σχ. (16) δίνει τα 21 στοιχεία του \underline{F} συναρτήσει των γεωμετρικών παραμέτρων της σκάλας (βλ. Παραρτήματα).

Η αντιστροφή του \underline{F} , αριθμητικά, δίνει το υπομητρώο δυσκαμψίας $\underline{K}_{11} = \underline{F}^{-1}$, διαστάσεων 6×6 , που συνδέει τα \underline{P} και \underline{U} για $\underline{U}' = 0$. Κατόπιν το πλήρες μητρώο δυσκαμψίας \underline{K} , που συνδέει το μητρώο-στήλη $[\underline{P} \ \underline{P}']^T$ με το $[\underline{U} \ \underline{U}']^T$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \underline{P} \\ \underline{P}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & \underline{K}_{11} \underline{A}^T \\ \underline{A} \underline{K}_{11} & \underline{A} \underline{K}_{11} \underline{A}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{U}' \end{bmatrix} \quad (17)$$

όπου το μητρώο \underline{A} , που συνδέει τα \underline{P} και \underline{P}' , προκύπτει από τις συνθήκες ισορροπίας: Για την ελικοειδή σκάλα:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H & -a_2 & -1 & 0 & 0 \\ -H & 0 & a_1 & 0 & -1 & 0 \\ a_2 & -a_1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Για τις σκάλες τύπου A και B, το μητρώο \underline{A} προκύπτει από αυτό της σχ. (18), με αντικατάσταση του a_2 με a και του a_1 με 0.

Η εκτέλεση των πολλαπλασιασμών μητρώων της σχ. (17), δίνει την εξής τελική μορφή του μητρώου δυσκαμψίας \underline{K} για την ελικοειδή σκάλα:

$$\underline{K} = \quad (19)$$

k_{11}																				
k_{21}	k_{22}																			
k_{31}	k_{32}	k_{33}																		
k_{41}	k_{42}	k_{43}	k_{44}																	
k_{51}	k_{52}	k_{53}	k_{54}	k_{55}																
k_{61}	k_{62}	k_{63}	k_{64}	k_{65}	k_{66}															
$-k_{11}$	$-k_{12}$	$-k_{13}$	$-k_{14}$	$-k_{15}$	$-k_{16}$	k_{11}														
$-k_{21}$	$-k_{22}$	$-k_{23}$	$-k_{24}$	$-k_{25}$	$-k_{26}$	k_{21}	k_{22}													
$-k_{31}$	$-k_{32}$	$-k_{33}$	$-k_{34}$	$-k_{35}$	$-k_{36}$	k_{31}	k_{32}	k_{33}												
$k_{10,1}$	$k_{10,2}$	$k_{10,3}$	$k_{10,4}$	$k_{10,5}$	$k_{10,6}$	$-k_{10,1}$	$-k_{10,2}$	$-k_{10,3}$	$k_{10,10}$											
$k_{11,1}$	$k_{11,2}$	$k_{11,3}$	$k_{11,4}$	$k_{11,5}$	$k_{11,6}$	$-k_{11,1}$	$-k_{11,2}$	$-k_{11,3}$	$k_{11,10}$	$k_{11,11}$										
$k_{12,1}$	$k_{12,2}$	$k_{12,3}$	$k_{12,4}$	$k_{12,5}$	$k_{12,6}$	$-k_{12,1}$	$-k_{12,2}$	$-k_{12,3}$	$k_{12,10}$	$k_{12,11}$	$k_{12,12}$									

Συμμετρικό

όπου

$$k_{10,j} = Hk_{2j} - a_2 k_{3j} - k_{4j} \quad (j = 1,6) \quad (20)$$

$$k_{11,j} = -Hk_{1j} + a_1 k_{3j} - k_{5j} \quad (j = 1,6) \quad (21)$$

$$k_{12,j} = a_2 k_{1j} - a_1 k_{2j} - k_{6j} \quad (j = 1,6) \quad (22)$$

$$k_{10,10} = H^2 k_{22} - 2a_2 Hk_{32} + a_2^2 k_{33} - 2Hk_{42} + 2a_2 k_{43} + k_{44} \quad (23)$$

$$k_{11,10} = -H^2 k_{21} + a_2 Hk_{31} + a_1 Hk_{32} - a_1 a_2 k_{33} + Hk_{41} - a_1 k_{43} - Hk_{52} + a_2 k_{53} + k_{54} \quad (24)$$

$$k_{12,10} = a_2 Hk_{21} - a_1 Hk_{22} - a_2^2 k_{31} + a_1 a_2 k_{32} - a_2 k_{41} + a_1 k_{42} - Hk_{62} + a_2 k_{63} + k_{64} \quad (25)$$

$$k_{11,11} = H^2 k_{11} - 2a_1 Hk_{31} + a_1^2 k_{33} + 2Hk_{51} - 2a_1 k_{53} + k_{55} \quad (26)$$

$$k_{12,11} = -a_2 Hk_{11} + a_1 Hk_{21} + a_1 a_2 k_{31} - a_1^2 k_{32} - a_2 k_{51} + a_1 k_{52} + Hk_{61} - a_1 k_{63} + k_{65} \quad (27)$$

$$k_{12,12} = a_2^2 k_{11} - 2a_1 a_2 k_{21} + a_1^2 k_{22} - 2a_2 k_{61} + 2a_1 k_{62} + k_{66} \quad (28)$$

Αν οι άξονες OX_1 και $O'X'_1$ είναι παράλληλοι στον οριζόντιο άξονα συμμετρίας που περνάει από το μέσο του ύψους της σκάλας, όπως συμβαίνει στις σκάλες τύπου Α και Β, το μητρώο k μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι $k_{12} = k_{13} = 0$, και ότι $k_{15} = k_{1,11}$, $k_{16} = k_{1,12}$: Ας υποθέσουμε ότι οι μόνες μη-μηδενικές επικόμβιες μετακινήσεις είναι οι u_2 , u_3 , θ_2 , θ_3 στην κορυφή, που προ-

καλούν την επικόμβια δύναμη $P_1 = k_{12} u_2 + k_{13} u_3 + k_{15} \theta_2 + k_{16} \theta_3$ στην κορυφή και την $P'_1 = -P_1$ στη βάση. (Σχήμα 4a). Ας θεωρήσουμε, κατόπιν, εναλλακτικά, ότι οι μόνες μη-μηδενικές επικόμβιες μετακινήσεις είναι οι $u'_2, u'_3, \theta'_2, \theta'_3$, στη βάση, που προκαλούν την $P_1 = k_{18} u'_2 + k_{19} u'_3 + k_{1,11} \theta'_2 + k_{1,12} \theta'_3$ στην κορυφή και την $P'_1 = -P_1$ στη βάση (Σχήμα 4b). Ας περιστρέψουμε, κατόπιν, την εικόνα του Σχήματος 4b κατά 180° περί τον οριζόντιο άξονα συμμετρίας από το μέσο του ύψους της σκάλας, και ας την επαλληλίσουμε με αυτήν του Σχήματος 4a, υποθέτοντας ότι $u_2 = u'_2, u_3 = u'_3, \theta_2 = \theta'_2$ και $\theta_3 = \theta'_3$. Προκύπτει έτσι μία σκάλα με μηδενικές επικόμβιες μετακινήσεις στα 2 άκρα, και με δυνάμεις $P_1 = (k_{12}-k_{18}) u_2 + (k_{13}-k_{19}) u_3 + (k_{15}-k_{1,11}) \theta_2 + (k_{16}-k_{1,12}) \theta_3$ στην κορυφή και $P'_1 = -P_1$ στη βάση. Επειδή όλες οι επικόμβιες μετακινήσεις είναι μηδενικές, πρέπει να είναι μηδενικές και οι επικόμβιες δυνάμεις, και μάλιστα για οποιεσδήποτε τιμές των $u_2, u_3, \theta_2, \theta_3$, πράγμα που απαιτεί:

$$k_{12} = k_{18} \quad (29)$$

$$k_{13} = k_{19} \quad (30)$$

$$k_{15} = k_{1,11} \quad (31)$$

$$k_{16} = k_{1,12} \quad (32)$$

Είναι όμως (βλ. σχ. (20), και σχ. (21), (22) με $j = 1, a_1 = 0, a_2 = a$):

$$k_{18} = -k_{12} \quad (33)$$

$$k_{19} = -k_{13} \quad (34)$$

$$k_{1,11} = -H k_{11} - k_{15} \quad (35)$$

$$k_{1,12} = a k_{11} - k_{16} \quad (36)$$

Ο συνδυασμός των σχ. (29)-(32) με τις σχ. (33)-(36) δίνει:

$$k_{12} = k_{13} = 0 \quad (37)$$

$$k_{15} = -\frac{H}{2} k_{11} \quad (38)$$

$$k_{16} = \frac{a}{2} k_{11} \quad (39)$$

Στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι:

$$k_{24} = k_{2,10} \quad (40)$$

$$k_{34} = k_{3,10} \quad (41)$$

$$k_{4,11} = -k_{5,10} \quad (42)$$

$$k_{4,12} = -k_{6,10} \quad (43)$$

όπου τα στοιχεία k_{15} , k_{16} , k_{42} , k_{43} , k_{45} και k_{46} εκφράζονται συναρτήσει των 13 ανεξάρτητων στοιχείων του k_{11} , δηλ. των k_{11} , k_{14} , k_{22} , k_{23} , k_{25} , k_{26} , k_{33} , k_{35} , k_{36} , k_{44} , k_{55} , k_{56} και k_{66} , μέσω των σχ. (38), (39) και (47)-(49), και τα στοιχεία $k_{4,10}$, $k_{5,10}$, $k_{6,10}$, $k_{5,11}$, $k_{6,11}$ και $k_{6,12}$ μέσω των σχέσεων:

$$k_{4,10} = \frac{H^2}{2} k_{22} - \alpha H k_{23} + \frac{\alpha^2}{2} k_{33} - k_{44} \quad (51)$$

$$k_{5,10} = \frac{H}{2} (k_{14} + k_{25}) - \frac{\alpha}{2} k_{35} \quad (52)$$

$$k_{6,10} = \frac{H}{2} k_{26} - \frac{\alpha}{2} (k_{14} + k_{36}) \quad (53)$$

$$k_{5,11} = \frac{H^2}{2} k_{11} - k_{55} \quad (54)$$

$$k_{6,11} = -\frac{\alpha H}{2} k_{11} - k_{56} \quad (55)$$

$$k_{6,12} = \frac{\alpha^2}{2} k_{11} - k_{66} \quad (56)$$

Όλοι οι όροι ευκαμψίας f_{ij} με $i+j$ περιττό αλλάζουν πρόσημο, αν η σκάλα μετατραπεί από "δεξιόστροφη" σε "αριστερόστροφη". (βλ. Παράρτημα I). Επομένως, και όλοι οι όροι k_{ij} του αντίστροφου μητρώου ξ , που έχουν $i+j$ περιττό, αλλάζουν τότε πρόσημο ($i, j = 1$ έως 6). Επειδή όμως και το πρόσημο των α και α_2 αλλάζει τότε, από τις σχ. (19)-(28), (39), (47)-(56) προκύπτει ότι όλοι οι όροι του μητρώου δυσκαμψίας ξ με $i+j$ περιττό αλλάζουν πρόσημο, αν η σκάλα γίνει αριστερόστροφη.

6. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι σημαντικότεροι βαθμοί ελευθερίας δομικών συστημάτων κτιρίων που υπόκεινται σε σεισμικές, ή, γενικότερα, οριζόντιες δράσεις, είναι οι οριζόντιες μεταθέσεις των ορόφων σε 2 ορθογωνικές διευθύνσεις, και οι στροφές τους περί κατακόρυφο άξονα. Αν οι πλάκες των ορόφων λειτουργούν σαν άκαμπτα διαφράγματα, οι επικόμβιες μετακινήσεις u_1 , u_2 , θ_3 στην κορυφή της σκάλας, και u'_1 , u'_2 , θ'_3 στη βάση της εκφράζονται συναρτήσει αυτών των 3 βαθμών ελευθερίας ανά όροφο. Επιπλέον, η σκάλα επηρεάζει το μέγεθος, τη διεύθυνση και την εκκεντρότητα της συνολικής τέμνουσας ορόφου, μέσω των επικομβίων οριζοντίων δυνάμεων $P_1 = -P_1$, $P_2 = -P_2$, και, κατά προσέγγιση, μέσω της μέσης ροπής περί κατακόρυφο άξονα, $\frac{1}{2} (M_3 + |M'_3|)$. Οι οριζόντιες επικόμβιες δυνάμεις που προκαλούνται από τις u_1 , u'_1 , u_2 , u'_2 ισούνται με $P_1 = -P_1 = k_{11}(u_1 - u'_1) + k_{12}(u_2 - u'_2)$, και με $P_2 = -P_2 = k_{22}(u_2 - u'_2) + k_{12}(u_1 - u'_1)$. Για τις σκάλες τύπου Α και Β, ο k_{12} είναι μηδέν, και δεν υπάρχει σύζευξη μεταξύ των 2 οριζοντίων διευθύνσεων. Έτσι, οι συντελεστές k_{11} και k_{22} εκφράζουν την πλευρική δυσκαμψία της σκάλας στις οριζόντιες διευθύνσεις 1 και 2, και ο k_{12} τη σύζευξη μεταξύ των 2 αυτών διευθύνσεων. Η μέση ροπή $\frac{1}{2} (M_3 + |M'_3|)$, περί κατακόρυφο άξονα,

λόγω σχετικής στροφής $\theta_3 - \theta'_3$, ισούται, κατά προσέγγιση, με $\frac{1}{2} (k_{66} - k_{6,12})(\theta_3 - \theta'_3)$. Έτσι ο όρος $\bar{k}_{66} \equiv \frac{1}{2} (k_{66} - k_{6,12})$ εκφράζει, κατά προσέγγιση, τη στρεπτική δυσκαμψία της σκάλας ως προς κατακόρυφο άξονα. Επομένως, οι 4 όροι k_{11} , k_{22} , k_{12} και \bar{k}_{66} , εκφράζουν τα κυριότερα χαρακτηριστικά της επιρροής της σκάλας στην πλευρική δυσκαμψία της κατασκευής. Στα Σχήματα 6-15 παρουσιάζονται οι 4 αυτοί όροι σε αδιάστατη μορφή (οι 3 πρώτοι διαιρεμένοι με EI_x/H^3 , και ο τελευταίος με EI_x/H) συναρτήσσει των γεωμετρικών παραμέτρων της σκάλας: της κλίσης του άξονα, $\tan\theta$, του λόγου h/b της διατομής της σκάλας, και του λόγου r/l για τις σκάλες τύπου A και B, ή της γωνίας $2\varphi_0$ για την ελικοειδή. Οι συνεχείς καμπύλες για $h/r = 0$ προκύπτουν αν αγνοηθούν οι διατμητικές και αξονικές παραμορφώσεις της σκάλας. Οι παραμορφώσεις αυτές, που λαμβάνονται υπ' όψη στις διακεκομμένες ή εστιγμένες καμπύλες με $h/r \neq 0$, είναι, κατά κανόνα, αμελητέες.

Όπως φαίνεται στα Σχ. 6-12, για δεδομένο ύψος ορόφου H , με μείωση του πλάτους b ή της κλίσης της σκάλας προς την οριζόντια, μειώνεται και η πλευρική δυσκαμψία της σκάλας, αλλά, γενικά, η μείωση αυτή δεν είναι σημαντική, σε σύγκριση τουλάχιστον με τη μεγάλη μείωση της πλευρικής δυσκαμψίας την οποία προκαλεί η μείωση του πάχους h της σκάλας. Για σκάλες τύπου A και B, η πλευρική δυσκαμψία μειώνεται, γενικά, όσο αυξάνεται το μήκος των ακραίων τμημάτων της σκάλας (ευθύγραμμων στην τύπου A, τεταρτο-κυκλικών στην τύπου B), σε βάρος αυτού του μεσαίου τμήματος. Η πλευρική δυσκαμψία είναι, κατά κανόνα, μέγιστη στην οριζόντια διεύθυνση που περνάει από τα 2 άκρα της σκάλας σε κάτοψη, και ελάχιστη στην κάθετη προς την παραπάνω διεύθυνση. Στις ελικοειδείς σκάλες, η πλευρική δυσκαμψία k_{22} είναι μικρή σε μέγεθος μόνο για γωνίες $2\varphi_0$ μεταξύ 270° και 360° . Για $2\varphi_0 = 180^\circ$, η k_{11} έχει τοπικό ελάχιστο, η δε k_{12} είναι μηδέν. Και οι 2 αυτές δυσκαμψίες παίρνουν πολύ μεγάλες τιμές για γωνίες $2\varphi_0$ σημαντικά μικρότερες των 180° , και έχουν τοπικό μέγιστο για $2\varphi_0 = 270^\circ$. Για γωνίες $2\varphi_0$ μεταξύ 270° και 360° , τα k_{11} και k_{22} έχουν περίπου ίσες τιμές, και μάλιστα σχετικά μικρές (μικρότερες από $12 EI_x/H^3$, που είναι η παράλληλη στη μικρή πλευρά, h , δυσκαμψία ενός αμφίπακτου υποστυλώματος, με το ίδιο ύψος ορόφου H , και την ίδια διατομή, $b \times h$, όπως η σκάλα). Έτσι οι ελικοειδείς σκάλες με γωνία μεταξύ 270° και 360° έχουν, για το ίδιο ύψος ορόφου, τη μικρότερη πλευρική δυσκαμψία από όλες τις γεωμετρικές μορφές κλιμάκων που εξετάζονται εδώ. Μάλιστα, αν και το ύψος h της διατομής μίας τέτοιας σκάλας είναι μικρό, η επιρροή της σκάλας στην πλευρική δυσκαμψία και τη σεισμική συμπεριφορά του κτιρίου μπορεί και να θεωρηθεί ασήμαντη. Μεταξύ των κλιμάκων A και B, η πλευρική δυσκαμψία είναι ελάχιστη για σκάλες τύπου A, με ευθύγραμμα ακραία τμήματα μήκους l μεταξύ του μισού και του διπλάσιου της ακτίνας r του ημικυκλίου. Ακόμα όμως και για τέτοιες αναλογίες κάτοψης, η πλευρική δυσκαμψία κλιμάκων τύπου A ή B δεν μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα.

Η στρεπτική δυσκαμψία της σκάλας, \bar{k}_{66} , είναι μικρή μόνο για σκάλες τύπου Β με μεγάλο κεντρικό ευθύγραμμο τμήμα. Διαφορετικά, η στρεπτική δυσκαμψία είναι σημαντική και περίπου ανεξάρτητη της γεωμετρίας της σκάλας σε κάτοψη.

Συμπερασματικά, με λίγες εξαιρέσεις (ελικοειδείς σκάλες με γωνία σε κάτοψη τουλάχιστον 270° , και μικρό πάχος h), οι καμπύλες στο χώρο σκάλες με στήριξη μόνο στα άκρα, που εξετάζονται εδώ, μπορεί να επηρεάσουν σημαντικά την πλευρική δυσκαμψία μιάς κατασκευής. Η παρουσία τους και η αλληλεπίδρασή τους με το υπόλοιπο δομικό σύστημα μπορεί να ληφθεί υπόψη ακριβώς, αν συμπεριληφθούν σε ένα προσομοίωμα του δομικού συστήματος στο χώρο, σαν ένα στοιχείο με μητρώο δυσκαμψίας που υπολογίζεται όπως περιγράφεται πιο πάνω. Η σκάλα μπορεί επίσης να θεωρηθεί, κατά προσέγγιση, σαν ένα "ισοδύναμο" υποστύλωμα, στο μέσο της οριζόντιας απόστασης μεταξύ των 2 άκρων της σκάλας, με 3 βαθμούς ελευθερίας σε κάθε άκρο (2 οριζόντιες μεταθέσεις και μία στροφή περί κατακόρυφο άξονα), και δυσκαμψία που υπολογίζεται απ'ευθείας από τα Σχ. 6-15.

Μετά τον υπολογισμό των μετακινήσεων των 2 άκρων της σκάλας από την ανάλυση του συνόλου του δομικού συστήματος για οριζόντιες δράσεις, το μητρώο-στήλη των επικομβίων δυνάμεων στην κορυφή, \bar{P} , μπορεί να υπολογισθεί, εφόσον είναι γνωστό το μητρώο δυσκαμψίας \bar{k} της σχ. (17). Κατόπιν, τα εντατικά μεγέθη σε οποιαδήποτε διατομή της σκάλας μπορούν να υπολογισθούν από τις σχ. (8)-(15), και να χρησιμοποιηθούν για τη διαστασιολόγηση της σκάλας για σεισμό.

7. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η παραπάνω μεθοδολογία εφαρμόζεται στη συνέχεια σε δύο "δεξιόστροφες" ελικοειδείς σκάλες με τα εξής γεωμετρικά στοιχεία: Κλίση του άξονα ως προς την οριζόντιο: $\tan\theta = 0,65$. Ύψος ορόφου $H = 3,2$ m. Πλάτος σκάλας $b = 1,3$ m, και πάχος $h = 0,2$ m. Μέτρο Ελαστικότητας $E = 29000$ ΜΡα. Η γωνία της πρώτης σκάλας σε κάτοψη είναι 180° , επομένως η ακτίνα του άξονά της είναι $r = 3,2/0,65\pi = 1,567$ m. Στη δεύτερη σκάλα η γωνία είναι 360° , επομένως $r = 0,784$ m. Είναι επίσης $EI_x = 25100$ kNm², και $h/b = 0,15$.

Τα Σχήματα 8, 11, 12 και 15, δίνουν τις εξής ανηγμένες τιμές των k_{11} , k_{22} , k_{12} και \bar{k}_{66} αντίστοιχα: Για τη σκάλα των 180° : 9,1, 108, 0, και 28, και για αυτή των 360° : 11,3, 8,7, 0 και 17,5. Επομένως, για τη σκάλα των 180° : $k_{11} = 7000$ kN/m, $k_{22} = 82800$ kN/m, $k_{12} = 0$, $\bar{k}_{66} = 220000$ kNm/rad, και για τη σκάλα των 360° : $k_{11} = 8670$ kN/m, $k_{22} = 6700$ kN/m, $k_{12} = 0$, $\bar{k}_{66} = 137000$ kNm/rad. Για τη σκάλα των 180° , το αμφίπακτο υποστύλωμα με την ίδια πλευρική δυσκαμψία έχει διατομή 75 cm x 22 cm, με τη μεγάλη πλευρά κατά την ευθεία που ενώνει τα άκρα του άξονα σε κάτοψη (διεύθυνση 2). Για τη σκάλα των 360° , το υποστύλωμα με την ίδια πλευρική δυσκαμψία έχει διατομή 32,5 cm x 28,5 cm, με την μεγάλη πλευρά μέσα στο κατακόρυφο επίπεδο που εφάπτεται του άξονα της σκάλας και στα 2 άκρα (διεύθυνση 1). Τέλος,

όσο αφορά τη στρεπτική δυσκαμψία, η σκάλα των 180° είναι "ισοδύναμη" με ένα υποστύλωμα διατομής $80 \text{ cm} \times 80 \text{ cm}$, και αυτή των 360° , με ένα διατομής $71 \text{ cm} \times 71 \text{ cm}$. Η θέση των "ισοδύναμων" αυτών υποστυλωμάτων είναι στο μέσο της οριζόντιας απόστασης των άκρων της.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η ανάλυση της κατασκευής για τη σεισμική δράση σχεδιασμού δίνει τις εξής σχετικές μετακινήσεις των 2 άκρων της σκάλας: $u_1 - u'_1 = 3 \text{ mm}$, $u_2 - u'_2 = 4 \text{ mm}$, και $\theta_3 - \theta'_3 = 25 \times 10^{-5} \text{ rad}$, και ότι όλες οι άλλες συνιστώσες μετακινήσεων είναι αμελητέες. Για τον υπολογισμό των εντατικών μεγεθών της σκάλας λόγω αυτών των σχετικών μετακινήσεων των άκρων της, απαιτείται γνώση του μητρώου-στήλη των επικομβίων δυνάμεων στην κορυφή \underline{P} . Άσχετα από το αν για την ανάλυση της κατασκευής χρησιμοποιήθηκε το πλήρες μητρώο δυσκαμψίας \underline{K} της σκάλας, ή απλώς οι όροι k_{11} , k_{22} , k_{12} , και \bar{k}_{66} (δηλ. το "ισοδύναμο" υποστύλωμα), ο υπολογισμός του \underline{P} από το \underline{U} (για $\underline{U}' = \underline{0}$) προϋποθέτει γνώση του υπομητρώου δυσκαμψίας \underline{K}_{11} , δηλ. του αντίστροφου του \underline{K} . Για τις 2 σκάλες που θεωρούνται εδώ το μητρώο \underline{K} υπολογίζεται από τις σχέσεις του Παραρτήματος, και αντιστρέφεται, δίνοντας τα εξής υπομητρώα δυσκαμψίας:

Για τη σκάλα των 180° :

$$\underline{K}_{11} = \begin{bmatrix} 7000 & & & & & & \\ & 0 & 82800 & & & & \\ & 0 & 50900 & 57200 & & & \\ & 3500 & 52600 & -8300 & 105000 & & \\ -11100 & -43100 & -29700 & -27900 & 48300 & & \\ 11000 & 84300 & 400 & 140000 & -61600 & 236000 & \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{Συμμετρικό} \\ \\ \\ \end{array} \quad (57)$$

και για αυτή των 360° :

$$\underline{K}_{11} = \begin{bmatrix} 8670 & & & & & & \\ & 0 & 6700 & & & & \\ & 5200 & 0 & 102000 & & & \\ & -2000 & 10600 & -78600 & 84700 & & \\ -14000 & 0 & -8600 & 3500 & 28000 & & \\ 7000 & 0 & -98700 & 79200 & -11000 & 137000 & \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{Συμμετρικό} \\ \\ \\ \end{array} \quad (58)$$

Το πάνω διαγώνιο υπομητρώο του \underline{K}_{11} , διαστάσεων 3×3 , έχει μονάδες kN/m , το κάτω διαγώνιο μονάδες kNm/rad , και τα 2 εκτός διαγωνίου υπομητρώα 3×3 , μονάδες kN .

Ο πολλαπλασιασμός $\underline{K}_{11} \underline{U}$ δίνει το \underline{P} για $\underline{U}' = \underline{0}$. Για τη σκάλα των 180° :

$$\underline{P} = [23,7 \quad 352 \quad 204 \quad 256 \quad -221 \quad 429]^T$$

και για αυτήν των 360° :

$$\underline{P} = [27,8 \quad 26,8 \quad -9,1 \quad 56,2 \quad -44,8 \quad 55,2]^T$$

όπου οι 3 πρώτοι αριθμοί είναι σε kN, και οι 3 τελευταίοι σε kNm. Από τη σχ. (15) μπορούν να υπολογισθούν πλέον τα 6 εντατικά μεγέθη σε οποιαδήποτε διατομή της σκάλας. Κατά κανόνα, οι πιο κρίσιμες διατομές της σκάλας είναι οι ακραίες. Έτσι, για τη διατομή στην κορυφή ($\varphi = 0$), η σχ. (15) δίνει: $N = P_3 \sin\theta - P_1 \cos\theta = 91$ kN (-28,3 kN), $V_x = P_1 \sin\theta + P_3 \cos\theta = 184$ kN (7,5 kN), $V_y = P_2 = 352$ kN (26,8 kN), $M_x = M_2 = -221$ kNm (-44,8 kNm), $M_y = -M_1 \sin\theta - M_3 \cos\theta = -499$ kNm (-76,9 kNm), $T = M_1 \cos\theta - M_3 \sin\theta = -19,3$ kNm (17 kNm), όπου οι εκτός παρενθέσεων τιμές αφορούν τη σκάλα των 180° , και οι εντός αυτή των 360° . Πρέπει να ακολουθήσει κατόπιν η διαστασιολόγηση της διατομής για το συνδυασμό των 6 αυτών εντατικών μεγεθών (πρακτικά, για το συνδυασμό $M_x - M_y - N$, και τους συνδυασμούς $V_x - T$ και $V_y - T$).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α:

ΟΡΟΙ ΜΗΤΡΩΟΥ ΕΥΚΑΜΨΙΑΣ f_{ij} ΓΙΑ ΣΚΑΛΕΣ ΤΥΠΟΥ Α ΚΑΙ Β

Εισάγουμε τα κάτωθι σύμβολα:

$$a \equiv \frac{I_x}{I_y} = \left(\frac{h}{b}\right)^2, \quad a' \equiv \frac{EI_x}{G C} = \frac{1+a}{2}, \quad \lambda \equiv \frac{1}{r}$$

Για σκάλα τύπου Α, τα στοιχεία f_{ij} του μητρώου ευκαμψίας είναι:

$$f_{11} = \frac{r^2}{EI_x} \cdot \left\{ \frac{\tan^2\theta}{\cos\theta} \left(\frac{8}{3} \lambda^3 + \frac{7\pi}{2} \lambda^2 + \frac{3\pi^2}{2} \lambda + \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4} \right) + a \cos\theta \left[4\lambda + \frac{3\pi}{2} + 2 \tan^2\theta (2\lambda + \frac{3\pi}{2}) + \frac{1}{2} \tan^4\theta (\pi\lambda^2 + \pi^2\lambda + \frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi}{2}) \right] + a' \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \left(\lambda^2 + \pi\lambda + \frac{\pi^2}{3} - \frac{5}{2} \right) \right\} + \frac{r}{EA} \cdot \left\{ (2\lambda + \frac{\pi}{2}) \cos\theta + \frac{2k(1+\nu)}{\cos\theta} \left[(2\lambda + \frac{\pi}{2}) \sin^2\theta + \frac{\pi}{2} \right] \right\}$$

$$f_{12} = \frac{r^3}{EI_x} \left\{ \frac{\pi}{4} (2\lambda + \pi) \frac{\tan^2\theta}{\cos\theta} + a \left[\frac{\lambda^2}{\cos\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} (2 + \pi\lambda + 2\lambda^2) + (\lambda\pi + 2) \cos\theta - \frac{\pi}{4} (2\lambda + \pi) \frac{\sin^4\theta}{\cos^3\theta} \right] + a' \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \left(2\lambda^2 + \frac{3\pi}{2} \lambda + 4 - \frac{\pi^2}{4} \right) \right\}$$

$$f_{13} = \frac{r^3}{EI_x} \left\{ (\lambda^3 + \pi\lambda^2 + \frac{\pi^2}{4} \lambda - \frac{\pi}{4}) \frac{\tan\theta}{\cos\theta} + a \sin\theta \left[6\lambda + \frac{3\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} \lambda^2 + \frac{\pi^2}{4} \lambda + 2\lambda + \frac{5\pi}{4} \right) \tan^2\theta \right] + a' \sin\theta \left(\frac{\pi}{2} \lambda^2 + \frac{\pi^2}{4} \lambda - 4\lambda - \frac{\pi}{4} \right) \right\}$$

$$f_{14} = - \frac{r^2}{EI_x} \left\{ \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\tan\theta}{\cos\theta} - a \sin\theta \left[(2\lambda + \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{4} \tan^2\theta \right] + a' (2\lambda + \frac{\pi}{4}) \sin\theta \right\}$$

$$f_{15} = \frac{r^2}{EI_x} \left\{ (2\lambda^2 + \frac{3\pi}{2} \lambda + \frac{\pi^2}{4}) \frac{\tan\theta}{\cos\theta} + a \tan\theta \left[2 \cos\theta + \frac{\pi}{2} \left(\lambda + \frac{\pi}{2} \right) \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \right] + a' \sin\theta \left(\frac{\pi}{2} \lambda + \frac{\pi^2}{4} - 2 \right) \right\}$$

$$f_{16} = -\frac{r^2}{EI_x} \frac{a}{\cos\theta} (2\lambda + \pi)$$

$$f_{22} = \frac{r^3}{EI_x} \cdot \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\tan^2\theta}{\cos\theta} (\lambda^2 + \pi\lambda + \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}) + a \left[\frac{2\lambda}{3} \frac{1}{\cos^3\theta} - \lambda^2 (2\lambda + \pi) \frac{\tan^2\theta}{\cos\theta} + \frac{\sin^4\theta}{\cos^3\theta} (4\lambda^3 + \frac{9\pi}{2} \lambda^2 + \frac{3\pi^2}{2} \lambda + \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4}) + \cos\theta (\pi\lambda^2 + 4\lambda + \frac{\pi}{2}) - (4\lambda + \frac{\pi}{2}) \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \right] + a' \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \left[4\lambda^3 + \frac{11\pi}{2} \lambda^2 + \frac{3\pi^2}{2} \lambda + 8\lambda + \frac{\pi^3}{6} + \frac{5\pi}{4} \right] \right\} + \frac{r}{EA} \left\{ \frac{\pi}{2} \cos\theta + \frac{2k(1+\nu)}{\cos\theta} \left[2\lambda + \frac{\pi}{2} (1 + \sin^2\theta) \right] \right\}$$

$$f_{23} = -\frac{r^3}{EI_x} \left\{ \frac{\pi}{4} (\lambda + \pi) \frac{\tan\theta}{\cos\theta} - a \left[\frac{\tan\theta}{\cos\theta} \lambda^2 - 2(2\lambda + \pi) \lambda \frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta} + \sin\theta (2\lambda^2 + \frac{3\pi}{2} \lambda + 2) - \frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta} (\frac{3\pi}{4} \lambda + \frac{\pi^2}{4} + 2) \right] + a' \sin\theta (6\lambda^2 + \frac{17\pi}{4} \lambda + \frac{\pi^2}{2} + 4) \right\} + \frac{r}{EA} \left[2 - 4k(1+\nu) \right] \sin\theta$$

$$f_{24} = -\frac{r^2}{EI_x} \frac{\tan\theta}{\cos\theta} \left\{ \frac{\pi}{2} \lambda + \frac{\pi^2}{4} + (a \sin^2\theta + a' \cos^2\theta) (2\lambda^2 + \frac{3\pi}{2} \lambda + \frac{\pi^2}{4}) \right\}$$

$$f_{25} = \frac{r^2}{EI_x} \sin\theta \left\{ \frac{\pi}{4} \frac{1}{\cos^2\theta} + a (2\lambda + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \tan^2\theta) - a' (2\lambda + \frac{3\pi}{4}) \right\}$$

$$f_{26} = -\frac{r^2}{EI_x} (\lambda^2 + \pi\lambda + 2) \cos\theta (a + \tan^2\theta)$$

$$f_{33} = \frac{r^3}{EI_x} \frac{1}{\cos\theta} \left\{ \frac{2}{3} \lambda^3 + \frac{\pi}{2} \lambda^2 + \frac{\pi}{2} + (a \sin^2\theta + a' \cos^2\theta) (\frac{\pi}{2} \lambda^2 + 8\lambda + \frac{3\pi}{2}) \right\} + \frac{r}{EA} (2\lambda + \pi) \left[\tan^2\theta + 2k(1+\nu) \right] \cos\theta$$

$$f_{34} = \frac{r^2}{EI_x} \frac{1}{\cos\theta} \left[\frac{\pi}{2} + (a \sin^2\theta + a' \cos^2\theta) (2\lambda + \frac{\pi}{2}) \right]$$

$$f_{35} = \frac{r^2}{EI_x} \frac{1}{\cos\theta} \left[\lambda^2 + \frac{\pi}{2} \lambda + (a \sin^2\theta + a' \cos^2\theta) (\frac{\pi}{2} \lambda + 2) \right]$$

$$f_{36} = \frac{r^2}{EI_x} \sin\theta \left(\frac{1-a}{2} \right) (4\lambda + \pi)$$

$$f_{44} = \frac{r}{EI_x} \cdot \frac{1}{\cos\theta} \left[\frac{\pi}{2} + (a \sin^2\theta + a' \cos^2\theta) (2\lambda + \frac{\pi}{2}) \right]$$

$$f_{45} = f_{46} = 0$$

$$f_{55} = \frac{r}{EI_x} \cdot \frac{1}{\cos\theta} \left[2\lambda + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} (a \sin^2\theta + a' \cos^2\theta) \right]$$

$$f_{56} = \frac{r}{EI_x} (1-a) \sin\theta$$

$$f_{66} = \frac{r}{EI_x} \frac{(2\lambda + \pi)}{\cos\theta} (a \cos^2\theta + a' \sin^2\theta)$$

Για σκάλα τύπου Β, οι όροι f_{ij} του μητρώου f_{ν} είναι:

$$f_{11} = \frac{r^3}{EI_x} \left\{ \frac{\tan^2\theta}{2\cos\theta} \left(\frac{\pi}{2} \lambda^2 + \frac{3\pi^2}{4} \lambda + \lambda + \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{a}{\cos\theta} \left[\frac{\lambda^3}{3\cos\theta} + \lambda^2 \left(1 + \frac{\pi}{2} \tan^2\theta \right) + \right. \right.$$

$$\left. \cos^2\theta \left(\frac{\pi}{2} \lambda^2 + \pi\lambda + 3\lambda + \frac{3\pi}{2} \right) + \sin^2\theta \left(2\lambda^2 + 3\pi\lambda + \lambda + \frac{5\pi}{2} \right) + \right.$$

$$\left. \frac{\sin^4\theta}{2\cos^2\theta} \left(\frac{\pi}{2} \lambda^2 + \frac{5\pi^2}{4} \lambda - \lambda + \frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi}{2} \right) \right\} +$$

$$a' \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \left(\frac{3\pi}{4} \lambda^2 - 2\lambda^2 + \frac{5\pi^2}{8} \lambda - 2\pi\lambda + \frac{3}{2} \lambda + \frac{\pi^3}{6} - \frac{5\pi}{4} \right) \left\{ + \frac{r}{EA} \left\{ \frac{\pi}{2} \cos\theta + \right. \right.$$

$$\left. \frac{2k(1+\nu)}{\cos\theta} \left[\lambda + \frac{\pi}{2} (1 + \sin^2\theta) \right] \right\}$$

$$f_{12} = \frac{r^3}{EI_x} \left\{ \frac{\tan^2\theta}{4\cos\theta} (2\lambda^2 + 3\pi\lambda + \pi^2) + \frac{a}{\cos\theta} \left[2(\lambda+1) \cos^2\theta - (\lambda^2 + 2\lambda + 2) \sin^2\theta - \right. \right.$$

$$\left. \frac{\sin^4\theta}{4\cos^2\theta} (2\lambda^2 + 3\pi\lambda + \pi^2) + \frac{\lambda^2}{2} \right\} + a' \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\pi}{4} \lambda + 4\lambda - \frac{\pi^2}{4} + 4 \right)$$

$$f_{13} = -\frac{r^3}{EI_x} \left\{ \frac{\tan\theta}{2\cos\theta} \left(\lambda^2 + \frac{3\pi}{4} \lambda + \lambda + \frac{\pi}{2} \right) - a \left[\frac{\tan\theta}{2\cos\theta} \lambda^2 + \sin\theta \left(\lambda^2 + \frac{3\pi}{4} \lambda + 3\lambda + \frac{3\pi}{2} \right) + \right. \right.$$

$$\left. \frac{\sin^3\theta}{2\cos^2\theta} \left(\lambda^2 + \frac{7\pi}{4} \lambda + 3\lambda + \frac{5\pi}{2} \right) \right\} + a' \frac{\sin\theta}{2} \left(\lambda^2 - \frac{\pi}{4} \lambda + 3\lambda + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$f_{14} = -\frac{r^2}{EI_x} \left(\lambda + \frac{\pi}{2} \right) \frac{\sin\theta}{2} \left[\frac{1}{\cos^2\theta} - a (2 + \tan^2\theta) + a' \right]$$

$$f_{15} = \frac{r^2}{EI_x} \tan\theta \left\{ \frac{\pi(\pi+\lambda)}{4\cos\theta} + a \left[\frac{\lambda^2}{2\cos\theta} + 2(\lambda+1) \cos\theta + \frac{\pi}{4} (3\lambda + \pi) \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \right] - \right.$$

$$\left. a' \cos\theta \left(2\lambda - \frac{3\pi}{4} \lambda - \frac{\pi^2}{4} + 2 \right) \right\}$$

$$f_{16} = -\frac{r^2}{EI_x} \frac{a(\lambda+2)(\lambda+\pi)}{2\cos\theta}$$

$$f_{22} = \frac{r^3}{EI_x} \left\{ \left(\frac{\lambda^3}{3} + \frac{3\pi}{4}\lambda^2 + \frac{5\pi^2}{8}\lambda - \frac{\lambda}{2} + \frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \frac{\tan^2\theta}{\cos\theta} + \frac{a}{\cos\theta} \left[\lambda\cos^2\theta - (\lambda+\pi)\sin^2\theta + \frac{\pi}{2} + \frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta} \left(\frac{\pi}{4}\lambda^2 + \frac{3\pi^2}{8}\lambda + \frac{\lambda}{2} + \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4} \right) \right] + a' \frac{\sin^2\theta}{2\cos\theta} \left(\frac{\pi}{2}\lambda^2 + \frac{3\pi^2}{4}\lambda + 5\lambda + \frac{5\pi}{2} + \frac{\pi^3}{3} \right) \right\} + \frac{r}{EA} \left\{ \cos\theta \left(\lambda + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{2k(1+\nu)}{\cos\theta} \left[\frac{\pi}{2} + \sin^2\theta \left(\lambda + \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}$$

$$f_{23} = -\frac{r^3}{EI_x} \left\{ \frac{\tan\theta}{\cos\theta} \left(\frac{\lambda^3}{3} + \frac{\pi}{2}\lambda^2 + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{3\pi^2}{16}\lambda + \frac{3\pi}{4}\lambda - \frac{\lambda}{2} + \frac{\pi^2}{4} \right) - a \tan\theta \left[\left(2 + \frac{3\lambda}{2} \right) \cos\theta - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \left(\frac{\pi}{4}\lambda^2 + \frac{3\pi^2}{16}\lambda + \frac{\pi}{4}\lambda + \frac{5}{4}\lambda + \frac{\pi^2}{4} + 2 \right) \right] + a' \sin\theta \left(\frac{\pi}{4}\lambda^2 + \frac{3\pi^2}{16}\lambda + \frac{\pi}{4}\lambda + \frac{11}{4}\lambda + \frac{\pi^2}{4} + 4 \right) \right\} + \frac{r}{EA} \sin\theta (\lambda+2) \left[1 - 2k(1+\nu) \right]$$

$$f_{24} = -\frac{r^2}{EI_x} \cdot \frac{\tan\theta}{4\cos\theta} \cdot (\lambda+\pi) \left[2\lambda+\pi+\pi (a \sin^2\theta + a' \cos^2\theta) \right]$$

$$f_{25} = \frac{r^2}{EI_x} \cdot \left(\lambda + \frac{\pi}{2} \right) \frac{\sin\theta}{2} \left[\frac{1}{\cos^2\theta} + a (2 - \tan^2\theta) - 3a' \right]$$

$$f_{26} = -\frac{r^2}{EI_x} (\lambda+2) (a + \tan^2\theta) \cos\theta$$

$$f_{33} = -\frac{r^3}{EI_x} \cdot \frac{1}{\cos\theta} \left\{ \frac{\pi}{4} (\lambda^2 + 2\lambda + 2) + \frac{\lambda^3}{3} + \lambda^2 + \lambda + (a \sin^2\theta + a' \cos^2\theta) \left(\frac{\pi}{4}\lambda^2 + \frac{\pi}{2}\lambda + 3\lambda + \frac{3\pi}{2} \right) \right\} + \frac{r}{EA} (\lambda+\pi) \cos\theta \left[\tan^2\theta - 2k(1+\nu) \right]$$

$$f_{34} = \frac{r^2}{EI_x} \cdot \frac{2+\lambda}{4\cos\theta} \cdot \left[\pi + 2\lambda + \pi (a' \sin^2\theta + a \cos^2\theta) \right]$$

$$f_{35} = -\frac{r^2}{EI_x} \cdot \frac{1}{\cos\theta} \cdot \left[\frac{\lambda}{2} - \left(2 + \frac{3}{2}\lambda \right) (a \sin^2\theta + a' \cos^2\theta) \right]$$

$$f_{36} = \frac{r^2}{EI_x} (1-a) \left(\lambda + \frac{\pi}{2} \right) \sin\theta$$

$$f_{44} = \frac{r}{EI_x} \frac{1}{2\cos\theta} \left[\pi + 2\lambda + \pi (a \sin^2\theta + a' \cos^2\theta) \right]$$

$$f_{45} = f_{46} = 0$$

$$f_{55} = \frac{r}{EI_x} \frac{1}{2\cos\theta} \left[\pi + (\pi+2\lambda)(a \sin^2\theta + a' \cos^2\theta) \right]$$

$$f_{56} = \frac{r}{EI_x} \cdot (1-a) \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \sin\theta$$

$$f_{66} = \frac{r}{EI_x} \cdot \frac{\pi+\lambda}{\cos\theta} \cdot (a \cos^2\theta + a' \sin^2\theta)$$

Οι παραπάνω εκφράσεις για τα f_{ij} ισχύουν για σκάλες που ανεβαίνουν αντίθετα με τους δείκτες του ωρολογίου ("δεξιόστροφες" σκάλες). Για σκάλες που ανεβαίνουν κατά τη φορά των δεικτών του ωρολογίου ("αριστερόστροφες"), όλα τα f_{ij} με $i+j =$ περιττό (δηλ. τα $f_{14}, f_{16}, f_{23}, f_{25}, f_{34}, f_{36}, f_{45}, f_{56}$, και τα συμμετρικά τους), αλλάζουν πρόσημο.

Οι όροι που περιέχουν το $\frac{r}{EA}$, στα f_{ij} με $i, j \leq 3$, οφείλονται στις αξονικές και διατμητικές παραμορφώσεις της σκάλας.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β:

ΟΡΟΙ ΜΗΤΡΩΟΥ ΕΥΚΑΜΨΙΑΣ ξ ΓΙΑ ΕΛΙΚΟΕΙΔΕΙΣ ΣΚΑΛΕΣ

Εισάγουμε τα εξής σύμβολα:

$$a \equiv \frac{I_x}{I_y} = \left(\frac{h}{b}\right)^2, \quad a' \equiv \frac{EI_x}{GC} = \frac{1+a}{2}$$

$$I_0 \equiv \sin 2\varphi_0$$

$$I_2 \equiv \varphi_0 + \frac{1}{4} \sin 4\varphi_0$$

$$I_4 \equiv 2\varphi_0 \sin 2\varphi_0 + \cos 2\varphi_0 - 1$$

$$I_6 \equiv \varphi_0^2 + \frac{\varphi_0}{2} \sin 4\varphi_0 + \frac{1}{8} \cos 4\varphi_0 - \frac{1}{8}$$

$$I_8 \equiv \frac{4}{3} \varphi_0^3 + \frac{\varphi_0}{2} \cos 4\varphi_0 + \left(\varphi_0^2 - \frac{1}{8}\right) \sin 4\varphi_0$$

$$I_1 = 1 - \cos 2\varphi_0$$

$$I_3 \equiv \frac{1}{4} (1 - \cos 4\varphi_0)$$

$$I_5 = \sin 2\varphi_0 - 2\varphi_0 \cos 2\varphi_0$$

$$I_7 = \frac{1}{8} \sin 4\varphi_0 - \frac{\varphi_0}{2} \cos 4\varphi_0$$

$$I_9 = \frac{\varphi_0}{2} \sin 4\varphi_0 - \left(\varphi_0^2 - \frac{1}{8}\right) \cos 4\varphi_0 - \frac{1}{8}$$

Οπότε οι όροι f_{ij} του μητρώου ευκαμψίας γίνονται:

$$f_{11} = \frac{r^3}{EI_x} \cdot \left[\frac{\tan^2\theta}{\cos\theta} I_8 + a \left[\cos\theta (2\varphi_0 + I_2 - 2I_0) + \frac{\sin^4\theta}{\cos^3\theta} \cdot \left(\frac{8}{3} \varphi_0^3 - I_8 \right) + 2 \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} (I_5 - I_7) \right] \right. \\ \left. + a' \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \cdot \left(2\varphi_0 + \frac{8}{3} \varphi_0^3 - 2I_0 + I_2 - 2I_5 + 2I_7 - I_8 \right) \right] + \frac{r}{EA} \cdot \left[I_2 \cos\theta + \frac{2k(1+\nu)}{\cos\theta} (2\varphi_0 - I_2 \cos^2\theta) \right]$$

$$f_{12} = \frac{r^3}{EI_x} \left[-\frac{\tan^2 \theta}{\cos \theta} I_9 + a \left[\cos \theta (I_1 - I_3) + \frac{\sin^4 \theta}{\cos^3 \theta} I_9 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} (2\varphi_0^2 + I_4 - 2I_6) \right] - a' \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} (2\varphi_0^2 - I_1 + I_3 + I_4 - 2I_6 - I_9) \right] + \frac{r}{EA} \cos \theta [2k(1+\nu) - 1] I_3$$

$$f_{13} = \frac{r^3}{EI_x} \left[\frac{\tan \theta}{\cos \theta} I_7 + a \sin \theta [2\varphi_0 - 2I_0 + I_2] + \tan^2 \theta (I_5 - I_7) \right] - a' \sin \theta (2\varphi_0 - 2I_0 + I_2 - I_5 + I_7) + \frac{r}{EA} \sin \theta [2k(1+\nu) - 1] I_0$$

$$f_{14} = \frac{r^2}{EI_x} \left[\frac{\tan \theta}{\cos \theta} I_7 - a \sin \theta (I_0 - I_2 + I_7 \tan^2 \theta) + a' \sin \theta (I_0 - I_2 - I_7) \right]$$

$$f_{15} = \frac{r^2}{EI_x} \left[\frac{\tan \theta}{\cos \theta} I_6 + a \sin \theta [I_1 - I_3 + \tan^2 \theta (2\varphi_0^2 - I_6)] + a' \sin \theta (2\varphi_0^2 - I_1 + I_3 - I_6) \right]$$

$$f_{16} = -\frac{r^2}{EI_x} \left[a \cos \theta (2\varphi_0 - I_0 + I_5 \tan^2 \theta) + a' \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} (2\varphi_0 - I_0 - I_5) \right]$$

$$f_{22} = \frac{r^3}{EI_x} \left[\frac{\tan^2 \theta}{\cos \theta} \left(\frac{8}{3} \varphi_0^3 - I_8 \right) + a \cos \theta (2\varphi_0 - I_2 + I_8 \tan^4 \theta + 2I_7 \tan^2 \theta) + a' \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} (2\varphi_0 - I_2 - 2I_7 + I_8) \right] + \frac{r}{EA} \cos \theta [2\varphi_0 - I_2 + 2k(1+\nu) \left(\frac{2\varphi_0}{\cos^2 \theta} + I_2 \right)]$$

$$f_{23} = \frac{r^3}{EI_x} \left[\frac{\tan \theta}{\cos \theta} (I_6 - 2\varphi_0^2) + a \sin \theta [I_1 - I_3 + \tan^2 \theta (I_4 - I_6)] - a' \sin \theta (I_1 - I_3 - I_4 + I_6) \right] + \frac{r}{EA} \sin \theta [1 - 2k(1+\nu)] I_0$$

$$f_{24} = \frac{r^2}{EI_x} \left[\frac{\tan \theta}{\cos \theta} (I_6 - 2\varphi_0^2) - a \sin \theta (I_3 + I_6 \tan^2 \theta) + a' \sin \theta (I_3 - I_6) \right]$$

$$f_{25} = \frac{r^2}{EI_x} \left[-\frac{\tan \theta}{\cos \theta} I_7 + a \sin \theta (2\varphi_0 - I_2 + I_7 \tan^2 \theta) - a' \sin \theta (2\varphi_0 - I_2 - I_7) \right]$$

$$f_{26} = -\frac{r^2}{EI_x} \left[a \cos \theta (I_1 + I_4 \tan^2 \theta) + a' \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} (I_1 - I_4) \right]$$

$$f_{33} = \frac{r^3}{EI_x} \left[\frac{2\varphi_0 - I_2}{\cos \theta} + \frac{a \sin^2 \theta + a' \cos^2 \theta}{\cos \theta} (2\varphi_0 - 2I_0 + I_2) \right] + \frac{r}{EA} (2\varphi_0 \cos \theta) [\tan^2 \theta + 2k(1+\nu)]$$

$$f_{34} = \frac{r^2}{EI_x} \left[\frac{2\varphi_0 - I_2}{\cos \theta} - \frac{a \sin^2 \theta + a' \cos^2 \theta}{\cos \theta} (I_0 - I_2) \right]$$

$$f_{35} = \frac{r^2}{EI_x} \left[\frac{I_3}{\cos \theta} + \frac{a \sin^2 \theta + a' \cos^2 \theta}{\cos \theta} (I_1 - I_3) \right]$$

$$f_{36} = \frac{r^2}{EI_x} (a' - a) \sin \theta (2\varphi_0 - I_0)$$

$$f_{44} = \frac{r}{EI_x} \left[\frac{2\varphi_0 - I_2}{\cos \theta} + \frac{a \sin^2 \theta + a' \cos^2 \theta}{\cos \theta} I_2 \right]$$

$$f_{45} = \frac{r}{EI_x} \cdot \frac{1 - a \sin^2 \theta - a' \cos^2 \theta}{\cos \theta} I_3$$

$$f_{46} = \frac{r}{EI_x} (a - a') \sin \theta I_0$$

$$f_{55} = \frac{r}{EI_x} \left[\frac{I_2}{\cos \theta} + \frac{a \sin^2 \theta + a' \cos^2 \theta}{\cos \theta} (2\varphi_0 - I_2) \right]$$

$$f_{56} = \frac{r}{EI_x} (a' - a) \sin \theta I_1$$

$$f_{66} = \frac{r}{EI_x} \frac{2\varphi_0}{\cos \theta} (a \cos^2 \theta + a' \sin^2 \theta)$$

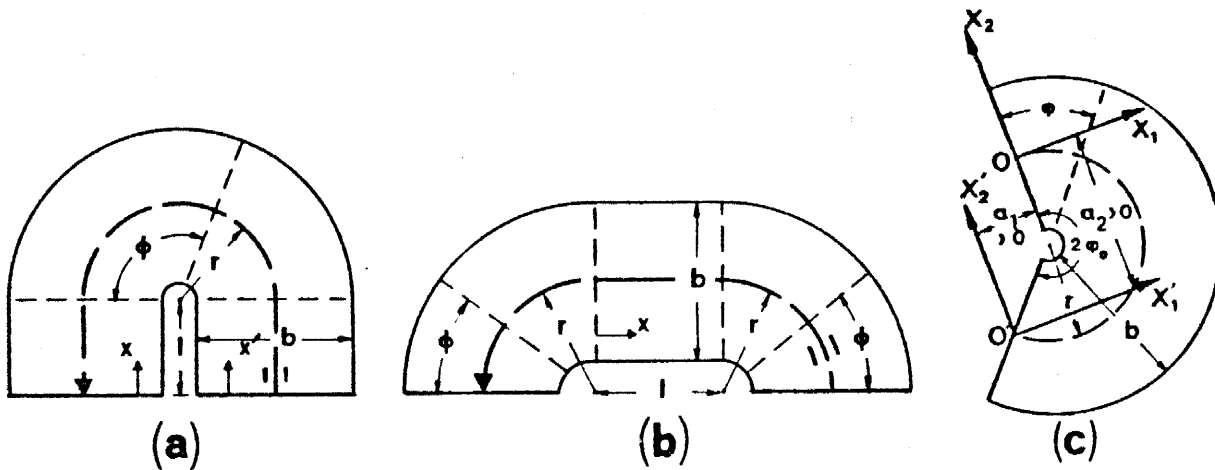
Οι παραπάνω εκφράσεις για τα f_{ij} ισχύουν για σκάλες που ανεβαίνουν αντίθετα με τους δείκτες του ωρολογίου ("δεξιόστροφες" σκάλες). Όπως και στις σκάλες τύπου Α και Β, για σκάλες που ανεβαίνουν κατά τη φορά των δεικτών του ωρολογίου ("αριστερόστροφες"), όλα τα f_{ij} με $i + j =$ περιττό (δηλ. τα f_{14} , f_{16} , f_{23} , f_{25} , f_{34} , f_{36} , f_{45} , f_{56} , και τα συμμετρικά τους), αλλάζουν πρόσημο.

Οι όροι που περιέχουν το $\frac{r}{EA}$, στα f_{ij} με $i, j \leq 3$, οφείλονται στις αξονικές και διατμητικές παραμορφώσεις της σκάλας.

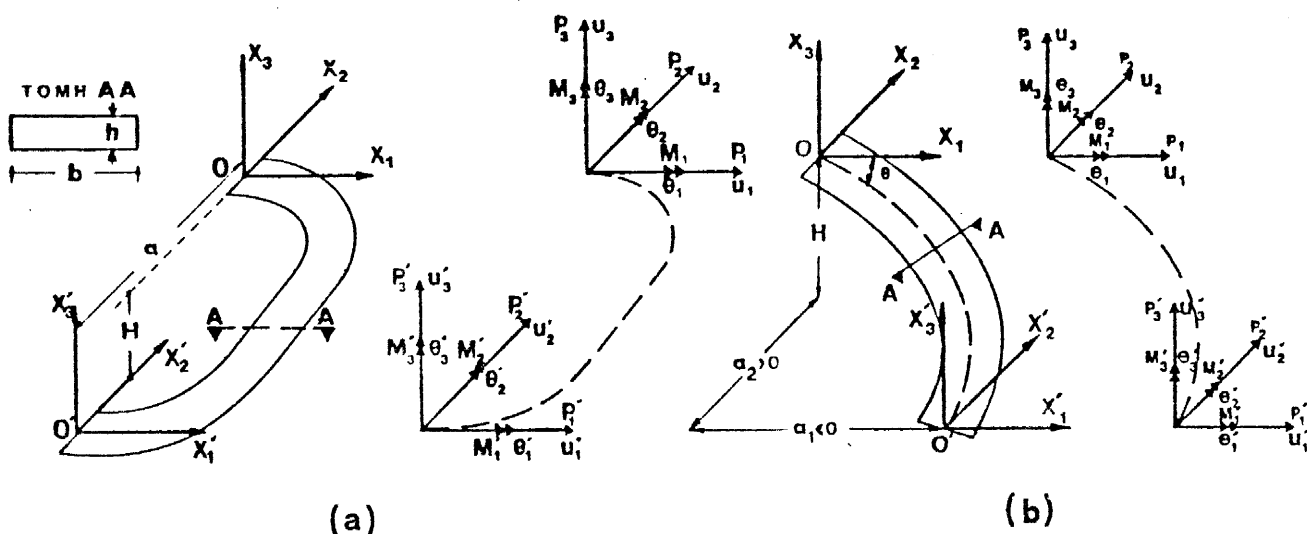
BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Angelidis, S., "Contribution of Stair Slabs in Earthquake Resistance of Buildings", Proc. COPISEE Seminar on "Problems of Structures in Seismic Areas", Θεσσαλονίκη, Μάρτος 1979, 173-180.
2. Βαρκαράκης, Κ., "Στατικός υπολογισμός των ελευθέρων κλιμάκων μορφής κατόψεως Π", Τεχνικά Χρονικά, Απρ.-Μάρτος-Ιούνιος 1978, 45-57.
3. Colotti, V., Sara, G., "Staircase Structure Influence on the Seismic Behavior of Reinforce Concrete Buildings", Proc. of 8th European Earthquake Engineering Conference, Lisbon, Sept. 1986.
4. Fardis, M.N., Skouteropoulou, A-M., O., and Bousias, S.N., "Stiffness Matrix of Free-Standing Helical Stairs", to appear, J. of Structural Division, ASCE.
5. Fuchsteiner, W., "Die Freitragende Wendeltreppe", Beton und Stahlbetonbau, Vol. 49, No. 11, Nov. 1954, 252-259.
6. Köseoglu, S., "Σκάλες", Μετάφραση από Beton-Kalender 1980, Τόμ. II, Εκδ. Μ. Γκιούρδα, Αθήνα, 1985.
7. Sandberg, L.B., and Beaufait, F.W., "Analytical and Experimental Studies of a Shearwall Stair Shaft", in "Reinforced Concrete Structures Subjected to Wind and Earthquake Forces", ACI Publ. SP-63, Detroit, Mich., 1980, 609-622.

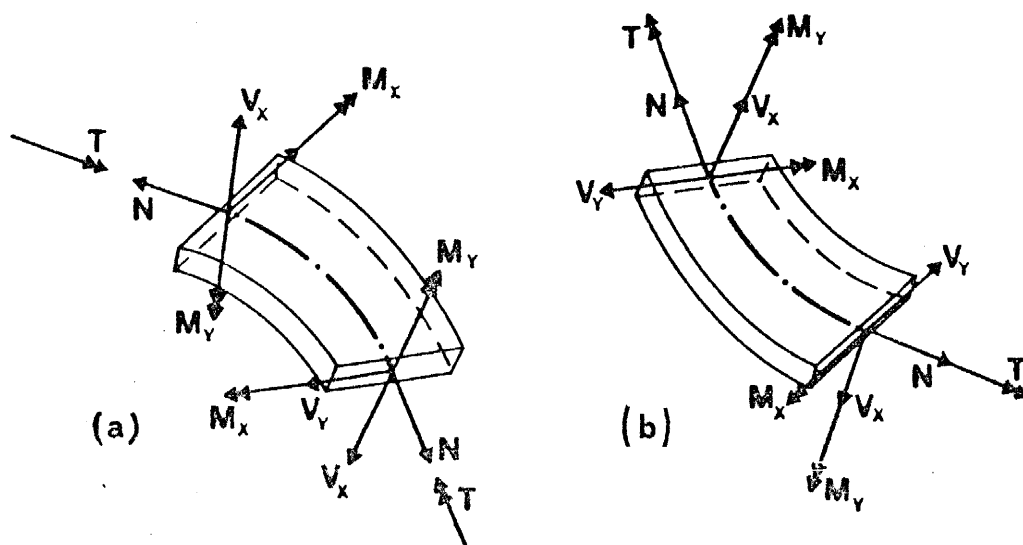
8. Skouteropoulou, A-M., O., Bousias, S.N., and Fardis, M.N., "Contribution of Curved Staircases to the Lateral Stiffness of Structures", Proc. of 8th European Earthquake Engineering Conference, Lisbon, Sept. 1986.
9. Skouteropoulou, A-M., O., Bousias, S.N., and Fardis, M.N., "Stiffness of Free-Standing Stairs with a 180° Turn", submitted to the J. of Structural Division, ASCE, 1986.
10. Φαρδής, Μ.Ν., "Μαθήματα Οπλισμένου Σκυροδέματος, Μέρος ΙΙΙ, Οργ. Εκδ. Διδακτ. Βιβλίων, Αθήνα, 1985.



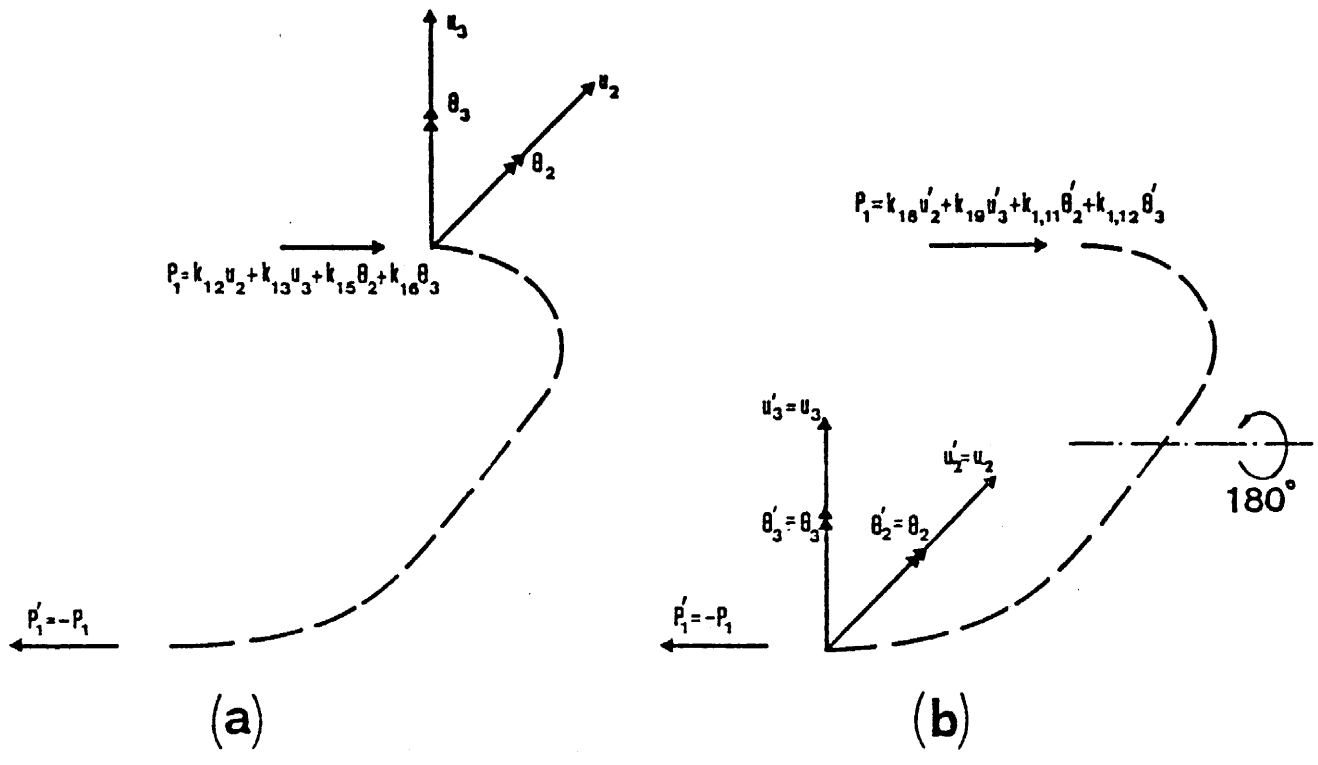
Σχ. 1. Γεωμετρία εξεταζομένων κλιμάκων: (a) Τύπος A, (b) Τύπος B, (c) Ελικοειδής



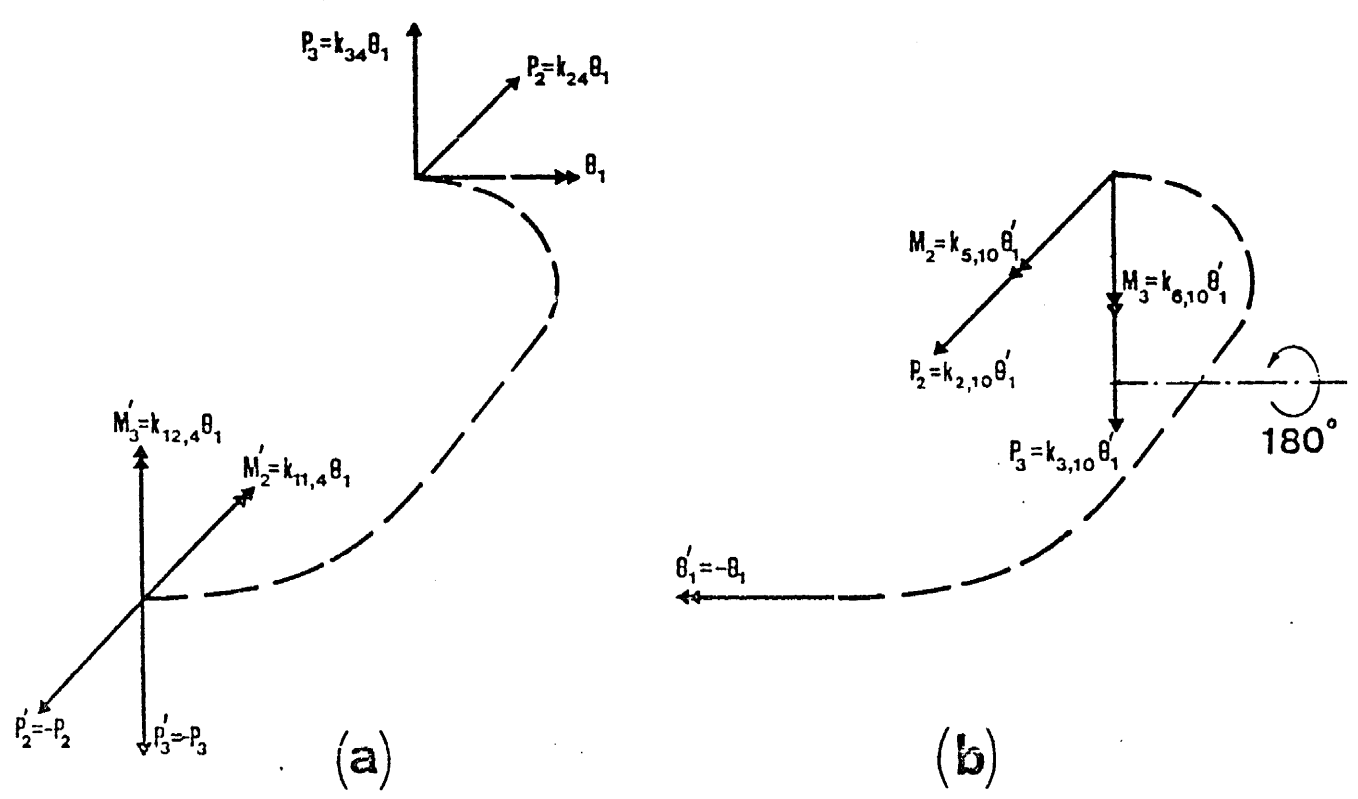
Σχ. 2. Συστήματα συντεταγμένων και επικόμβια μεγέθη, σε σκάλες: (a) Τύπου A ή B, (b) Ελικοειδείς



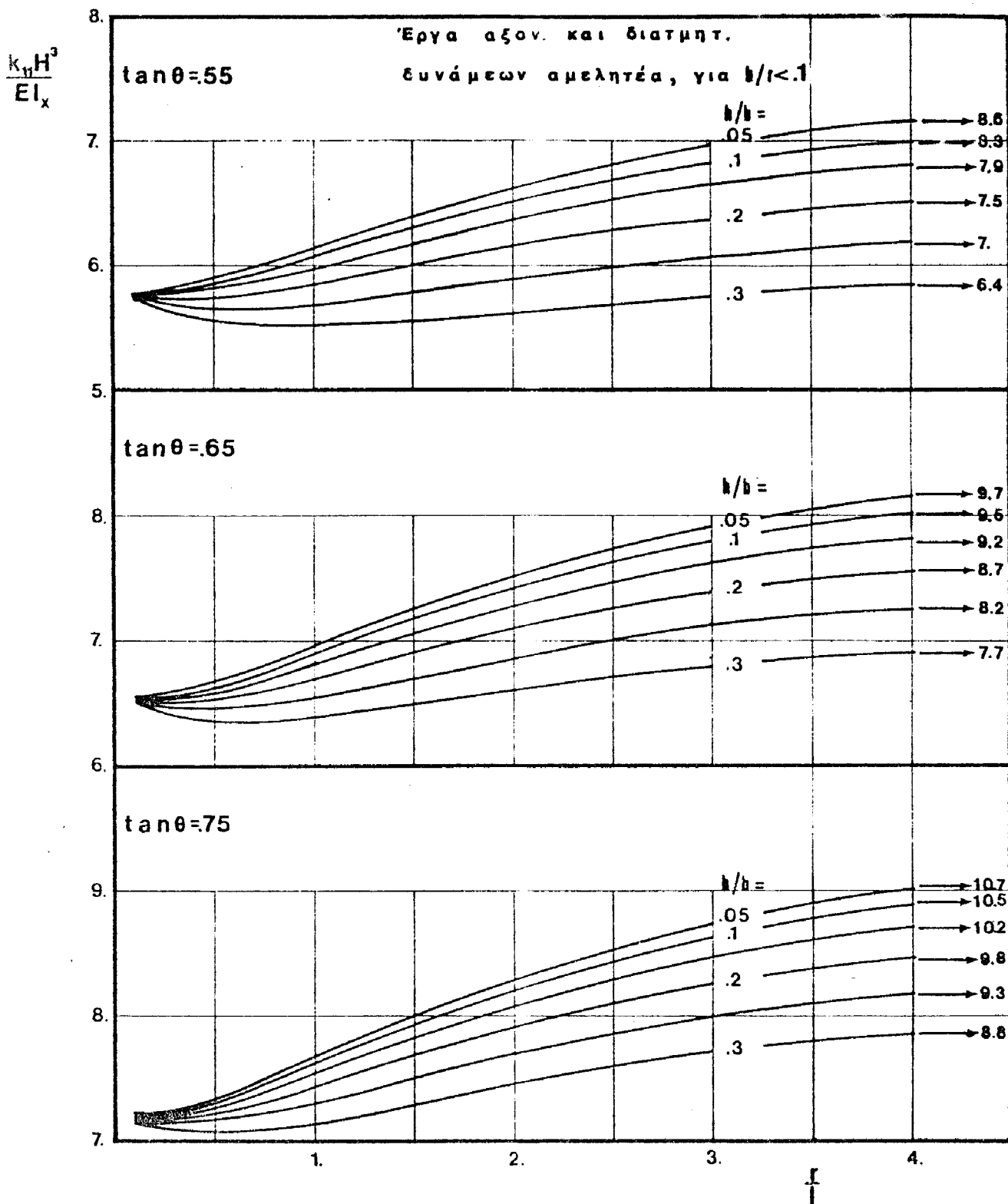
Σχ. 3. Εντατικά μεγέθη με τις θετικές φορές τους: Σκάλα (a) δεξιόστροφη (b) αριστερόστροφη



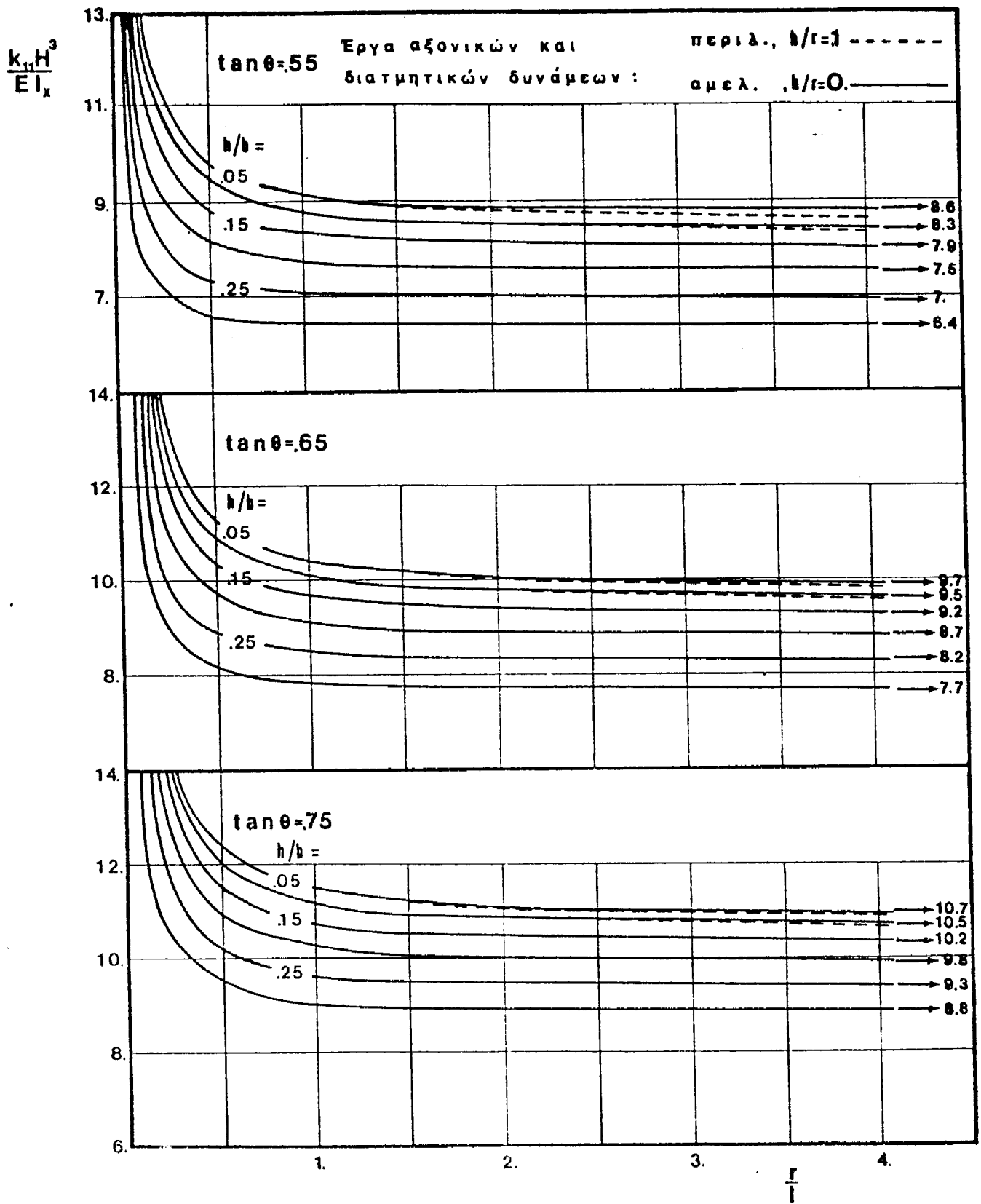
Σχ. 4. Απόδειξη ότι $k_{12} = k_{18}$, $k_{13} = k_{19}$, $k_{15} = k_{1,11}$, και $k_{16} = k_{1,12}$



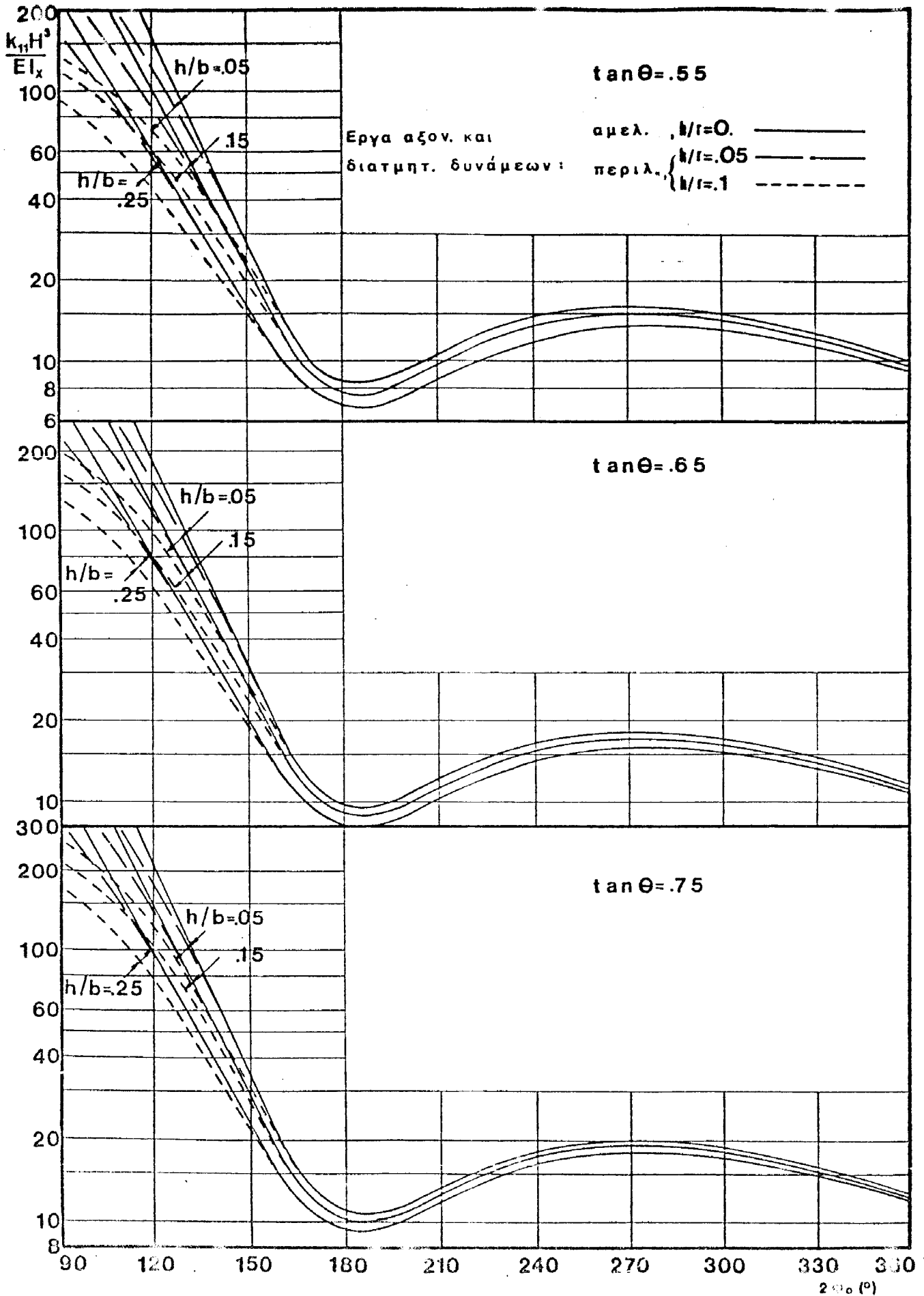
Σχ. 5. Απόδειξη ότι $k_{24} = k_{2,10}$, $k_{34} = k_{3,10}$, $k_{4,11} = k_{5,10}$ και $k_{4,12} = k_{6,10}$



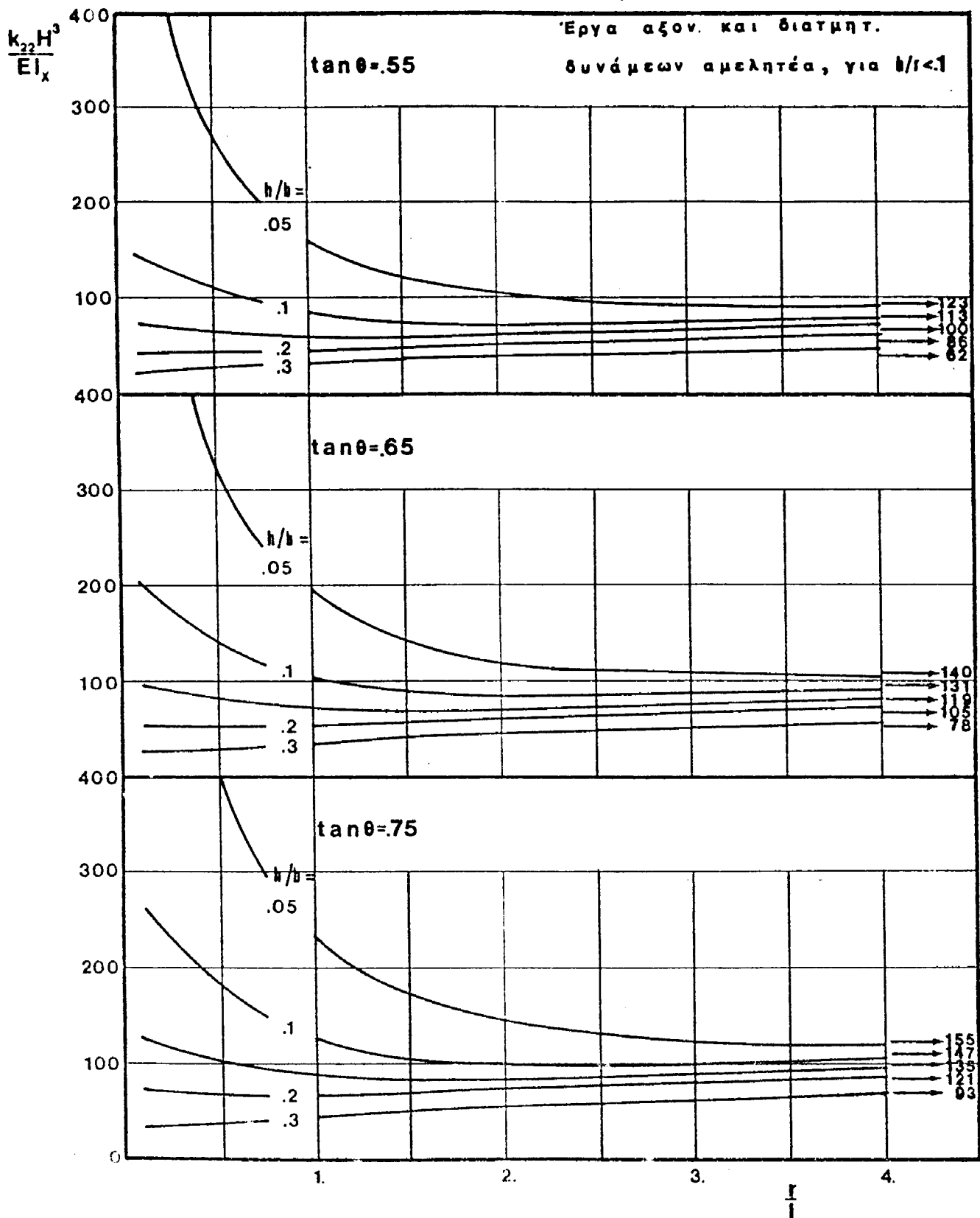
Σχ. 6. Συντελεστής πλευρικής δυσκαμψίας k_{11} για σκάλες τύπου A



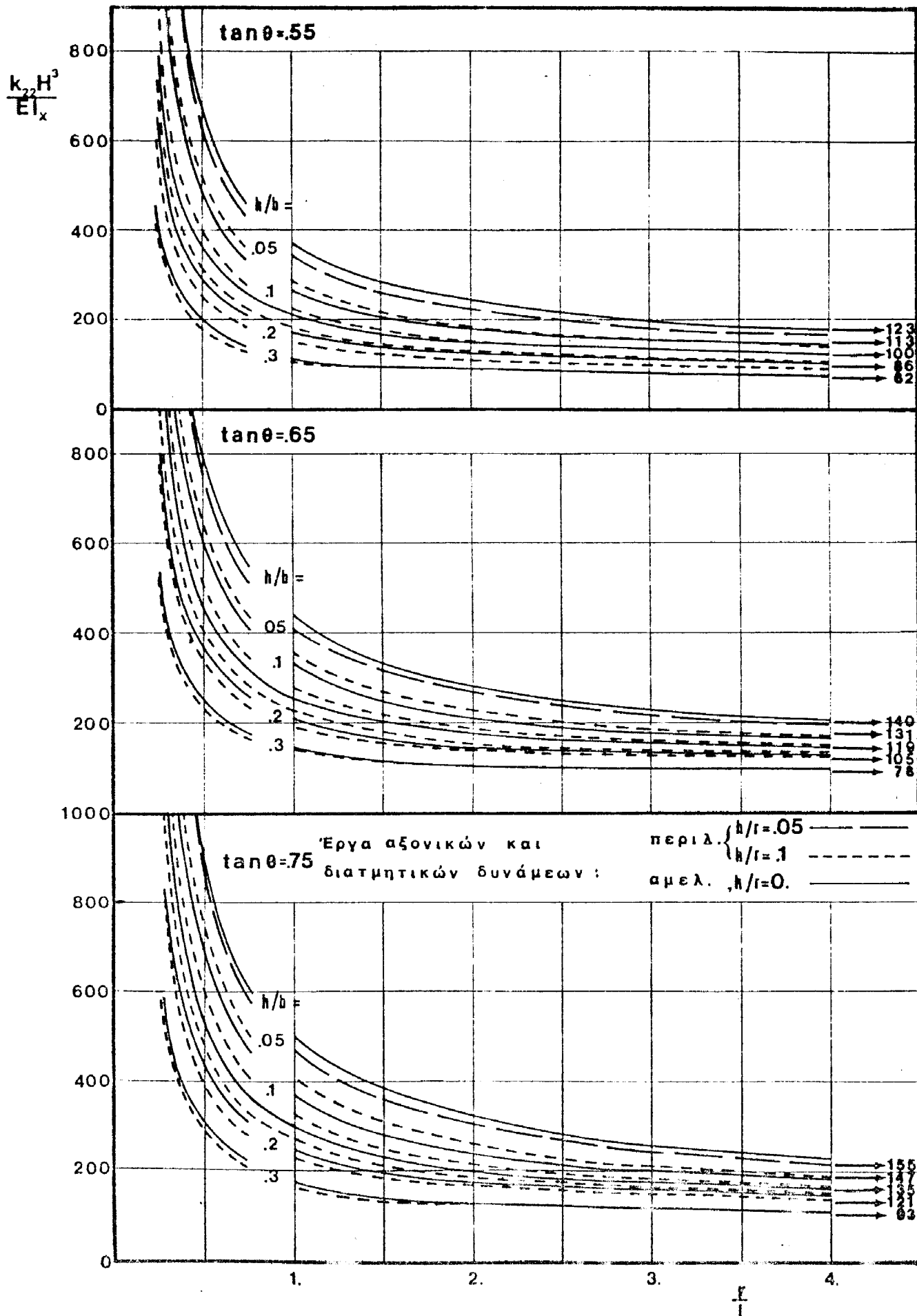
Σχ. 7. Συντελεστής πλευρικής δυσκαμψίας k_{11} για σκάλες τύπου Β



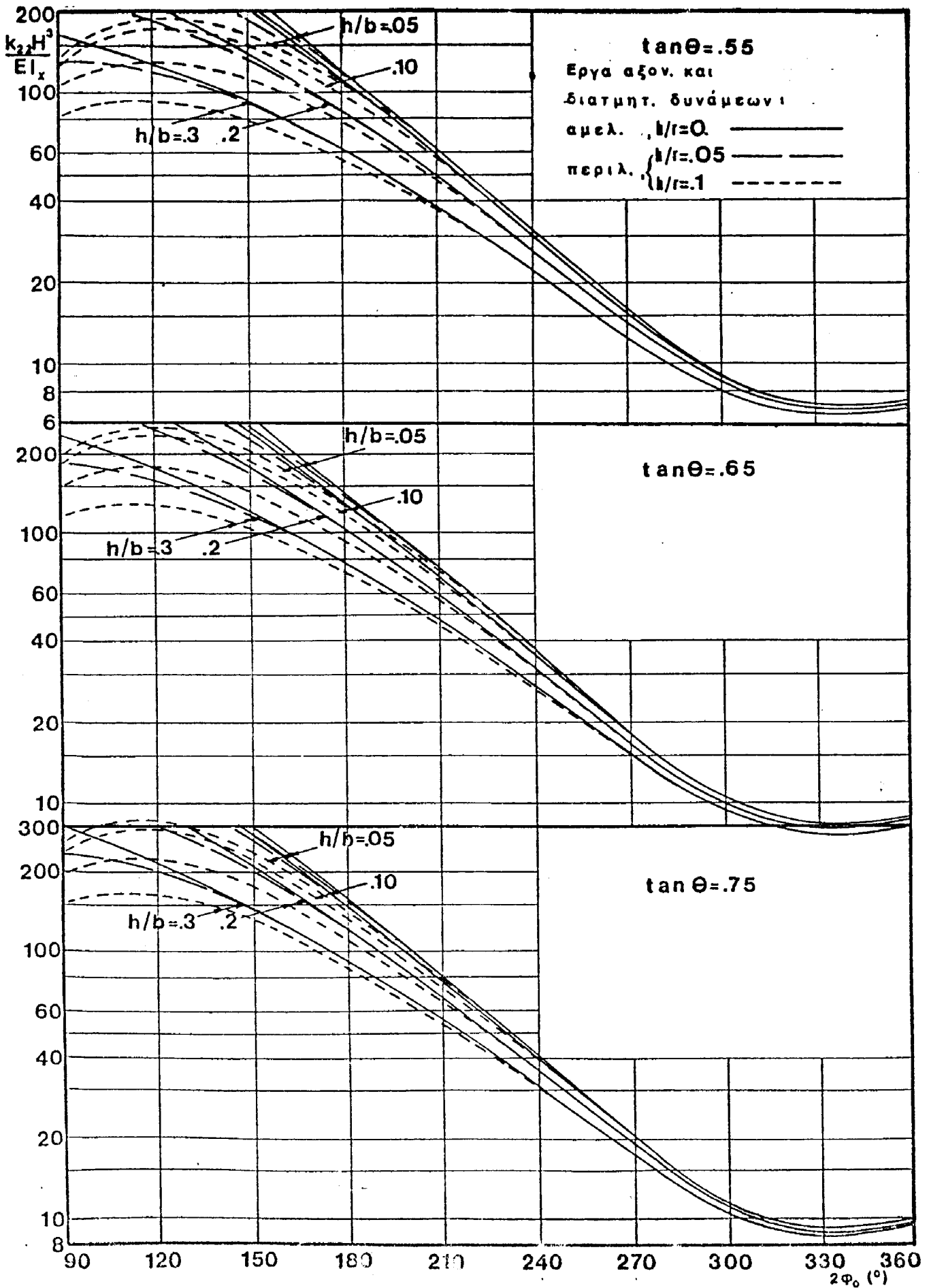
Σχ. 8. Συντελεστής πλευρικής δυσκαμψίας k_{11} για ελικοειδείς σκάλες



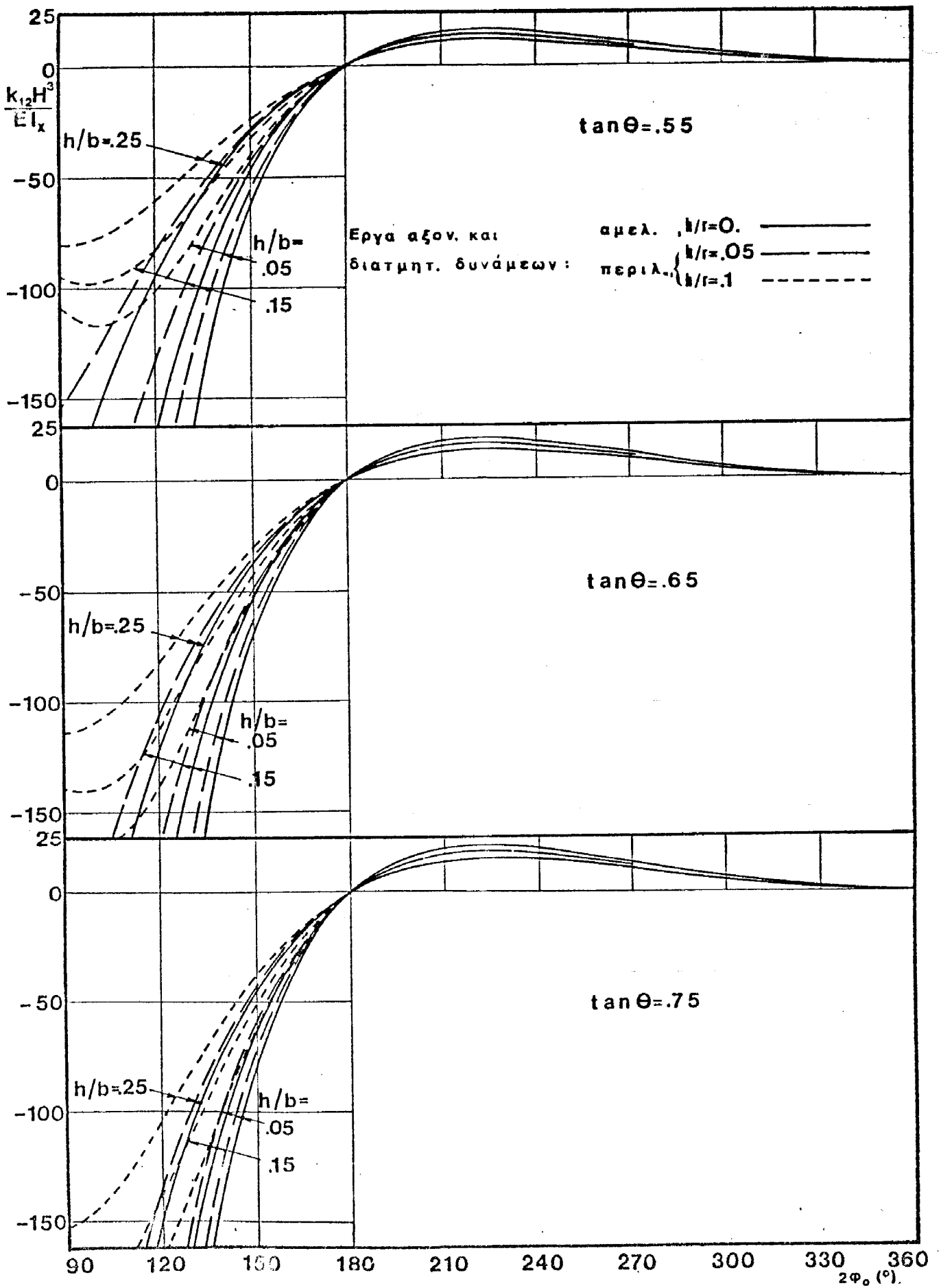
Σχ. 9. Συντελεστής πλευρικής δυσκαμψίας k_{22} για σκάλες τύπου A



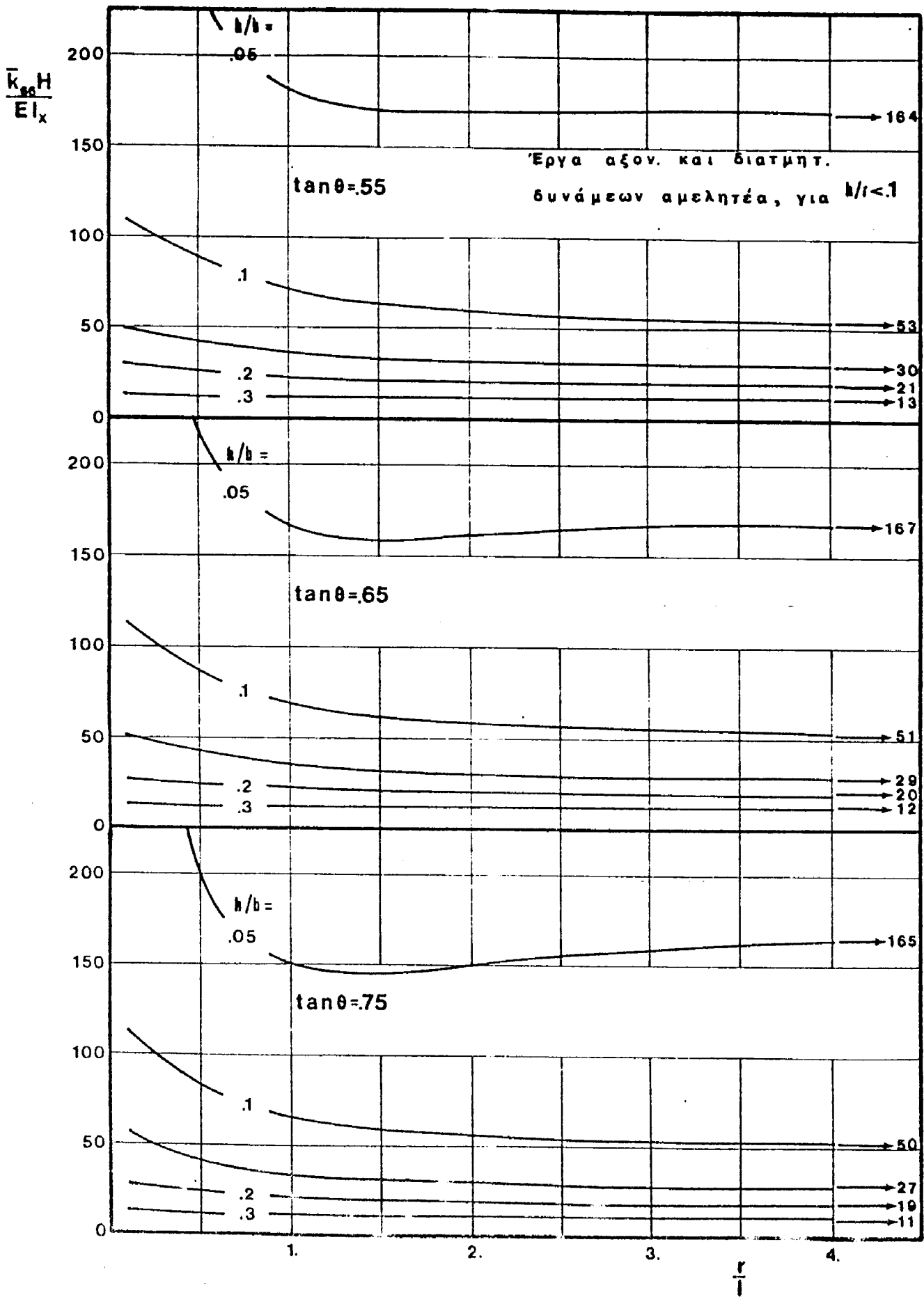
Σχ. 10. Συντελεστής πλευρικής δυσκαμψίας k_{22} για σκάλες τύπου B



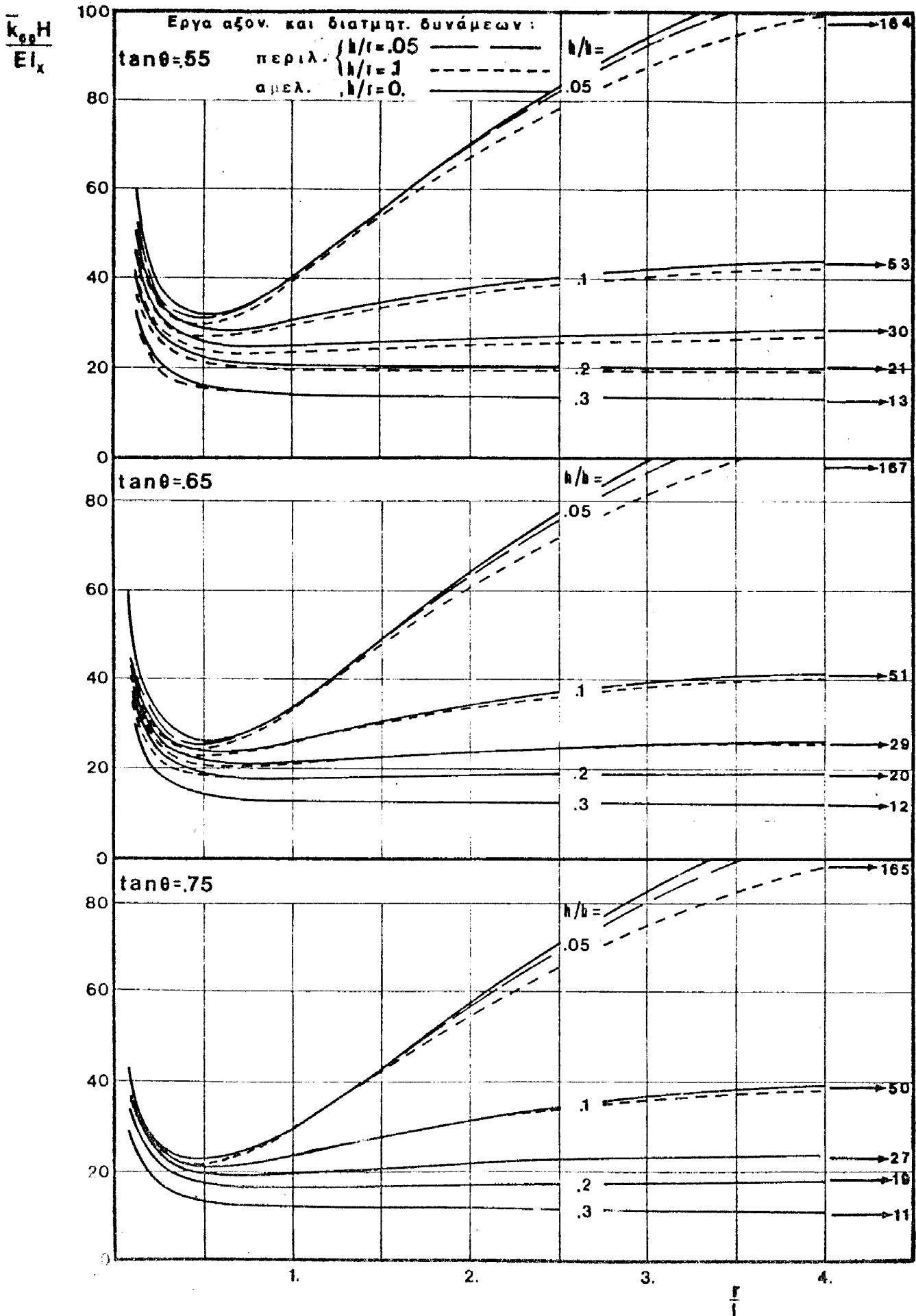
Σχ. 11. Συντελεστής πλευρικής δυσκαμψίας k_{22} για ελικοειδείς σκάλες



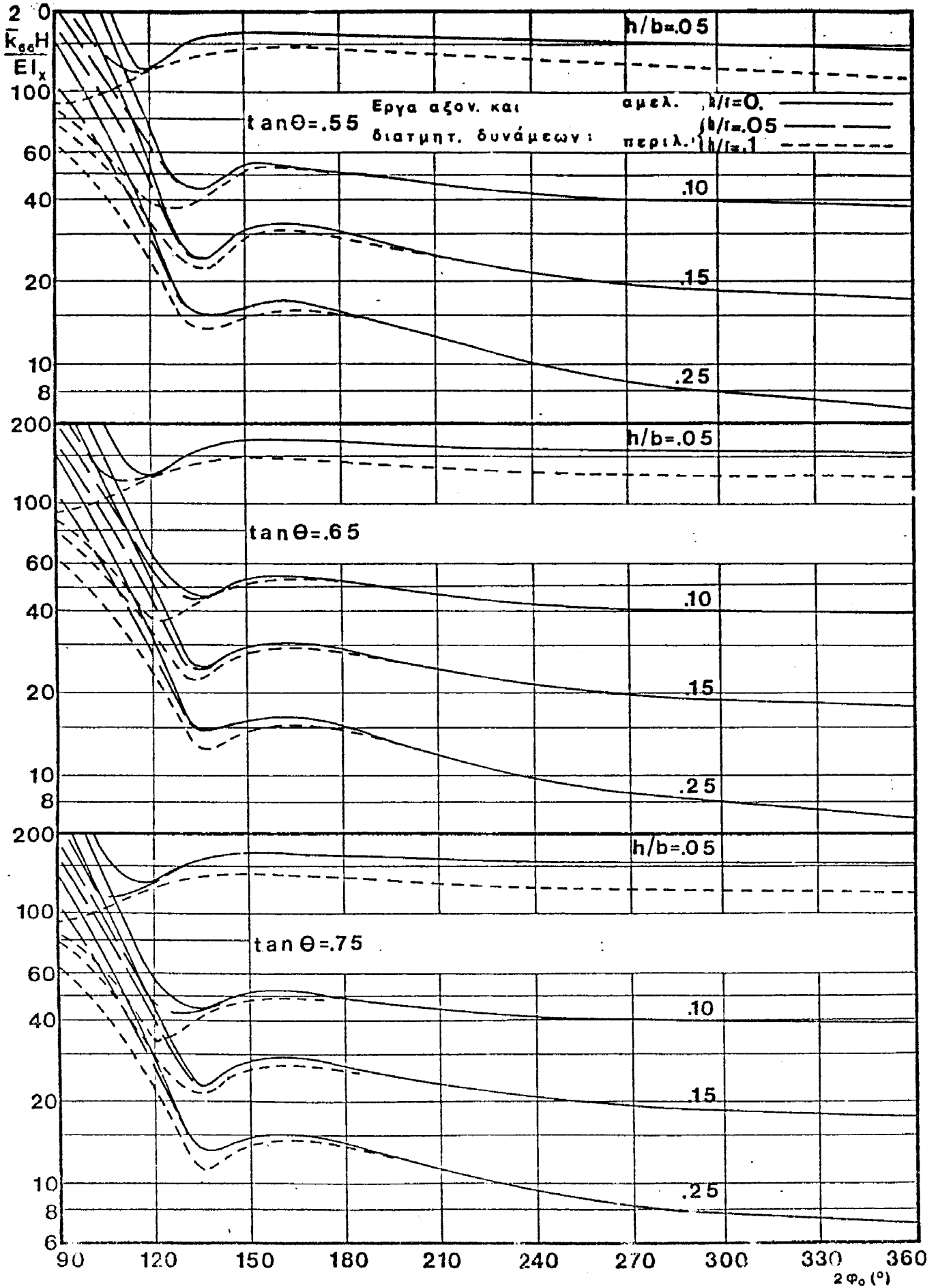
Σχ. 12. Συζευκτικός συντελεστής δυσκαμψίας k_{12} για ελικοειδείς σκάλες



Σχ. 13. Μέσος συντελεστής δυστροφίας \bar{k}_{66} , για σκάλες τύπου A



Σ . 14. Μέσος συντελεστής δυστροπίας, \bar{K}_{66} , για σκάλες τύπου Β



Σχ. 15. Μέσος συντελεστής δυσισοτροπίας \bar{k}_{66} για ελικοειδείς σκάλες