

4. ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΛΑΣΤΟΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΕΦΕΔΡΑΝΩΝ ΣΕ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΘΛΙΨΗ ΚΑΙ ΚΑΜΨΗ

4.1 Γενικά

Το φυσικό ελαστικό κάτω από φόρτιση εμφανίζει έντονα μη-γραμμική συμπεριφορά. Αν και έχει αναπτυχθεί μαθηματική θεωρία η οποία περιγράφει την συμπεριφορά εξιδανικευμένων ελαστικών στις μεγάλες παραμορφώσεις, τα αποτελέσματα της είναι πολύπλοκα χωρίς πρακτική εφαρμογή για τον σχεδιασμό. Στις περισσότερες περιπτώσεις όπως στα ελαστομεταλλικά εφέδρανα, έχουν πολύ καλή εφαρμογή απλές προσεγγιστικές σχέσεις με βάση την θεωρία γραμμικής ελαστικότητας. Η επέκταση της γραμμικής θεωρίας στις μεγάλες παραμορφώσεις εισάγει σφάλμα της τάξης του $\pm 15\%$ στις υπολογισμένες δυσκαμψίες το οποίο είναι ανεκτό.

Ο ακόλουθος Πίνακας 4-1 παρουσιάζει τις πειραματικά μετρημένες μηχανικές ιδιότητες δοκιμίων φυσικού ελαστικού συναρτήσει της σκληρότητας σε IRHD (International Rubber Hardness Degrees). Η ένδειξη της σκληρότητας μετράει την αναστρέψιμη ελαστική παραμόρφωση η οποία παράγεται από την εισχώρηση αντικειμένου ειδικού σχήματος και κατά συνέπεια συσχετίζεται με τις ελαστικές σταθερές του ελαστικού. Το μέτρο διόγκωσης K του φυσικού ελαστικού είναι πολύ μεγαλύτερο από το μέτρο ελαστικότητας E_0 έτσι για πρακτικούς σκοπούς ο λόγος Poisson ν μπορεί να θεωρείται ίσος με $\frac{1}{2}$ και το φυσικό ελαστικό ασυμπίεστο ακόμα και κάτω από υψηλά φορτία. Το γεγονός ότι $E_0 > 3G$ δηλώνει ότι το φυσικό ελαστικό δεν είναι ισότροπο υλικό.

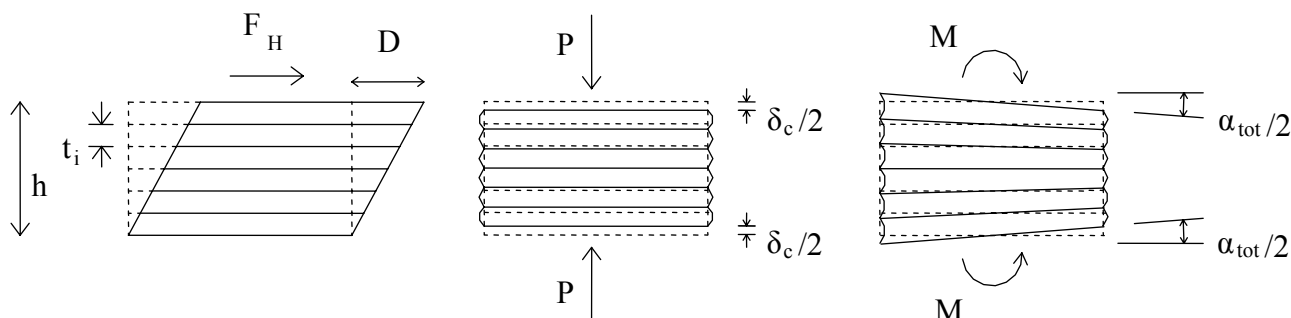
Πίνακας 4-1 Σκληρότητα και Ελαστικές Σταθερές Φυσικού Ελαστικού

Σκληρότητα IRHD ± 2	Μέτρο Ελαστικότητας E_0 (MPa)	Μέτρο Διατμήσεως G (MPa)	k^*	Μέτρο Διογκώσεως K (MPa)
30	0.92	0.30	0.93	2000
35	1.18	0.37	0.89	2000
40	1.50	0.45	0.85	2000
45	1.80	0.54	0.80	2000
50	2.20	0.64	0.73	2060
55	3.25	0.81	0.64	2180
60	4.45	1.06	0.57	2300
65	5.85	1.37	0.54	2420
70	7.35	1.73	0.53	2540
75	9.40	2.22	0.52	2660

* Ο διορθωτικός παράγοντας k χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό χαρακτηριστικών της συμπεριφοράς υπό θλίψη

Τα ελαστομεταλλικά εφέδρανα σεισμικής μόνωσης κατασκευάζονται από εναλλασσόμενες οριζόντιες στρώσεις φυσικού ελαστικού και μεταλλικών πλακών οι οποίες συνενώνεται με το ελαστικό κατά την διαδικασία του βουλκανισμού και εμφανίζουν εξαιρετική αντοχή σε αποκόλληση. Η παρεμβολή των μεταλλικών πλακών έχει ως σκοπό την αύξηση της δυσκαμψίας σε κατακόρυφη συμπίεση μέσω της παρεμπόδισης της πλευρικής διόγκωσης του ελαστικού στα ύψη των πλακών. Για τον ίδιο λόγο αυξάνει και η καμπτική δυσκαμψία του εφεδράνου. Η δυσκαμψία σε οριζόντια διάτμηση πρακτικά δεν επηρεάζεται από την εισαγωγή των μεταλλικών πλακών και παραμένει συνήθως δύο τάξεις μεγέθους μικρότερη από την δυσκαμψία σε κατακόρυφη συμπίεση.

Στο ακόλουθο Σχήμα 4-1 φαίνεται η συμπεριφορά ενός ελαστομεταλλικού εφεδράνου σε διάτμηση, κατακόρυφη συμπίεση και κάμψη. Οι δύο τελευταίες περιπτώσεις θα εξεταστούν αναλυτικά στις επόμενες παραγράφους.

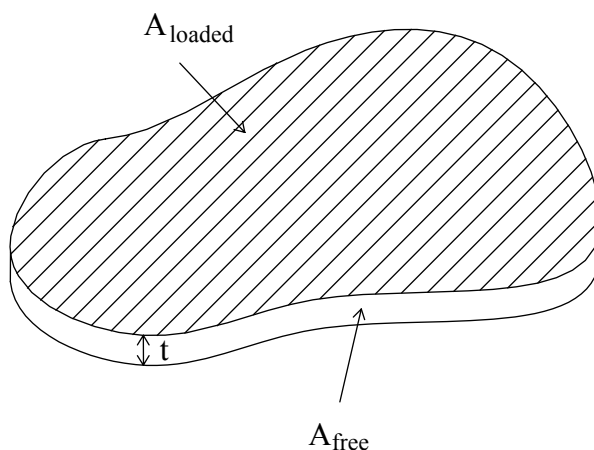


Σχήμα 4-1 Συμπεριφορά Ελαστομεταλλικού Εφεδράνου σε Διάτμηση, Συμπίεση και Κάμψη

4.2 Συμπεριφορά Ελαστομεταλλικών Εφεδράνων σε Κατακόρυφη Συμπίεση και Κάμψη

Κατά την συμπίεση και την κάμψη των ελαστομεταλλικών εφεδράνων παρουσιάζεται πλευρική διόγκωση των στρώσεων του ελαστικού. Το φαινόμενο αυτό εισάγει έντονες μη γραμμικότητες που καθιστούν πολύπλοκη την περιγραφή της αντίστοιχης συμπεριφοράς. Παρά την δυσκολία στην εκτίμηση τους οι ιδιότητες του εφεδράνου σε συμπίεση και κάμψη είναι ιδιαίτερα σημαντικές για τον σχεδιασμό του συστήματος σεισμικής μόνωσης. Έτσι η κατακόρυφη δυσκαμψία του συστήματος σεισμικής μόνωσης ελέγχει την κατακόρυφη ιδιοπερίοδο η οποία πρέπει να είναι αρκετά πιο δύσκαμπτη από την οριζόντια ιδιοπερίοδο. Επιπλέον από την καμπτική δυσκαμψία των εφεδράνων εξαρτάται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού των εφεδράνων. Ο συντελεστής ασφαλείας έναντι λυγισμού των εφεδράνων είναι ένας σημαντικός περιορισμός του σχεδιασμού του συστήματος σεισμικής μόνωσης.

Η συμπεριφορά του εφεδράνου σε συμπίεση και κάμψη εξαρτάται έντονα από τον συντελεστή σχήματος των στρώσεων. Ο συντελεστής σχήματος των στρώσεων του ελαστικού S ορίζεται ως ο λόγος της φορτιζόμενης επιφάνειας της στρώσης σε κάτοψη A_{loaded} προς την παράπλευρη ελεύθερη φορτίσεως επιφάνεια A_{free} όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 4-2 Ορισμός Συντελεστή Σχήματος Στρώσης Ελαστικού

Ο συντελεστής σχήματος εκφράζει τον αδιάστατο λόγο των διαστάσεων σε κάτοψη προς το πάχος t της στρώσης ελαστικού. Όσο πιο λεπτή είναι η στρώση του ελαστικού τόσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής σχήματος. Για μια κυκλική στρώση ελαστικού διαμέτρου Φ και πάχους t ισχύει :

$$S = \frac{A_{loaded}}{A_{free}} = \frac{\frac{\pi\Phi^2}{4}}{\pi\Phi t} = \frac{\Phi}{4t} \quad (4-1)$$

Όμοια μπορούν να υπολογιστούν οι συντελεστές σχήματος των παρακάτω περιπτώσεων στρώσεων ελαστικού πάχους t .

Πίνακας 4-2 Συντελεστής Σχήματος Στρώσεων Ελαστικού

Απειρομήκης λωρίδα πλάτους b	Κυκλική στρώση διαμέτρου Φ	Κυκλική στρώση διαμέτρου Φ_{ext} με κεντρική κυκλική οπή διαμέτρου Φ_{int}	Τετραγωνική στρώση πλευράς a	Ορθογωνική στρώση $a \times b$
$S = \frac{b}{2t}$	$S = \frac{\Phi}{4t}$	$S = \frac{\Phi_{ext} - \Phi_{int}}{4t}$	$S = \frac{a}{4t}$	$S = \frac{ab}{2(a+b)t}$

Όσο αυξάνει ο συντελεστής σχήματος των στρώσεων του εφεδράνου τόσο αυξάνει η κατακόρυφη και καμπτική δυσκαμψία. Όπως θα φανεί στην συνέχεια η αύξηση στις παραπάνω δυσκαμψίες είναι περίπου ανάλογη του τετραγώνου του συντελεστή σχήματος. Οι επόμενες δύο παράγραφοι περιγράφουν τις ιδιότητες των ελαστομεταλλικών εφεδράνων σε συμπίεση και κάμψη σύμφωνα με την γραμμική ελαστική θεωρία. Οι σχέσεις αυτές αναφέρονται σε ελαστομεταλλικά εφέδρανα. Για τα ελαστομεταλλικά εφέδρανα με πυρήνα μολύβδου (LRB) δεν έχουν παραχθεί αντίστοιχες σχέσεις. Η συνήθης πρακτική για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων των εφεδράνων LRB είναι η εφαρμογή των προηγούμενων σχέσεων για ένα πλήρες ελαστομεταλλικό εφέδρανο με την ίδια εξωτερική διάμετρο (δηλαδή με επέκταση του ελαστομεταλλικού μέρους και στον πυρήνα μολύβδου). Η σύγκριση της συμπεριφοράς σε συμπίεση τετραγωνικών εφεδράνων η οποία παρουσιάζεται από τους Mori et al δείχνει μικρή απόκλιση για εφέδρανα με ή χωρίς πυρήνα μολύβδου κάτι που υποστηρίζει την προηγούμενη πρακτική.

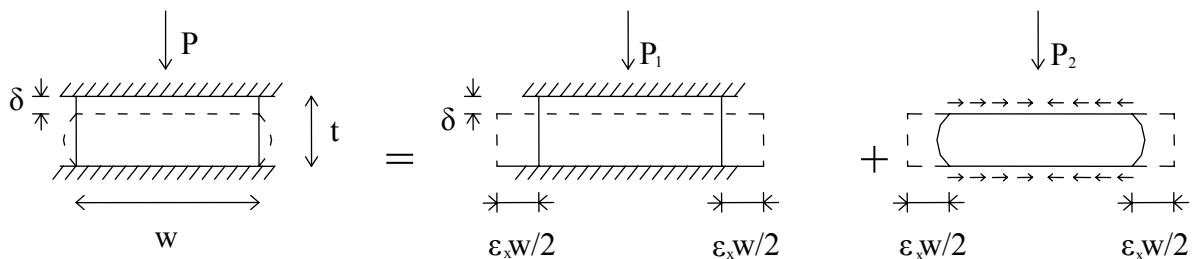
4.3 Συμπεριφορά σε Κατακόρυφη Συμπίεση

Η συμπεριφορά ενός ελαστομεταλλικού εφεδράνου σε κατακόρυφη συμπίεση κατά την αρχική φάση της φόρτισης είναι ιδιαίτερα μη γραμμική και εξαρτάται από πολλούς δευτερεύοντες παράγοντες που δεν μπορούν να προβλεφτούν αναλυτικά. Η τελική συμπεριφορά του εφεδράνου εκτιμάται αναλυτικά από την επόμενη σχέση κατακόρυφης δυσκαμψίας, κατ' αναλογία με την κατακόρυφη δυσκαμψία δοκού.

$$K_v = \frac{E_c A_r}{t_r} \quad (4-2)$$

όπου A_r η διατομή του ελαστικού η οποία είναι συγκολλημένη στις μεταλλικές πλάκες ενίσχυσης, t_r το συνολικό πάχος των στρώσεων του ελαστικού και E_c είναι το μέτρο συμπιεστότητας των στρώσεων ελαστικού. Υπάρχουν διάφορες λύσεις για τον υπολογισμό του μέτρου συμπιεστότητας E_c , οι περισσότερες των οποίων παραδέχονται γραμμικώς ελαστική συμπεριφορά και μικρές παραμορφώσεις. Στην συνέχεια θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα των δύο πιο συχνά χρησιμοποιούμενων θεωρήσεων.

Η 1^η θεώρηση οφείλεται στους Gent και Lindley και έχει υιοθετηθεί από την Βρετανική οδηγία BE 1/76. Η επίλυση τους αναφέρεται σε κυκλικά εφέδρανα και εφέδρανα απειρομήκους λωρίδας και για παραδοχή ασυμπίεστου υλικού ($\nu=1/2$). Για την περίπτωση εφεδράνου απειρομήκους λωρίδας η λύση προκύπτει μέσω της διαδικασίας η οποία περιγράφει το Σχήμα 4-3. Το κατακόρυφο φορτίο P επιμερίζεται σε δύο μέρη. Το P_1 είναι το φορτίο που απαιτείται για την βύθιση της στρώσης κατά δ με τις ακραίες επιφάνειες του εφεδράνου τελείως λείες, το P_2 είναι το φορτίο που απαιτείται για να κρατηθεί το εφέδρανο σε αυτή την θέση ενώ ταυτόχρονα ασκούνται διατμητικές τάσεις οι οποίες επαναφέρουν τις ακραίες επιφάνειες στην σωστή θέση. Σε αυτή την φάση γίνεται η παραδοχή ότι αρχικώς κατακόρυφα επίπεδα παίρνουν παραβολική μορφή



Σχήμα 4-3 Διαδικασία της Λύσης των Gent και Lindley

Το αποτέλεσμα για παραδοχή ασυμπίεστου υλικού είναι για στρώσεις απειρομήκους λωρίδας $E_c^\infty = \frac{4}{3}E_0(1+S^2)$ και για κυκλικές στρώσεις $E_c^\infty = E_0(1+2S^2)$.

Η προηγούμενη σχέση τροποποιείται για καλύτερη προσαρμογή σε πειραματικά δεδομένα ως εξής :

$$E_c^\infty = E_0(1+2kS^2) \quad (4-3)$$

όπου k είναι διορθωτικός παράγοντας ο οποίος προκύπτει από πειραματικά δεδομένα και τον δίνει ο Πίνακας 4-1 και E_0 είναι το μέτρο ελαστικότητας του ελαστικού. Η επίδραση της συμπιεστότητας του ελαστικού μειώνει το μέτρο συμπιεστότητας του υλικού από E_c^∞ σε E_c . Η επίδραση αυτή λαμβάνεται υπόψη από την ακόλουθη εμπειρική σχέση :

$$\frac{1}{E_c} = \frac{1}{E_c^\infty} + \frac{1}{K} \quad (4-4)$$

όπου K είναι το μέτρο διόγκωσης του ελαστικού.

Η 2^η θεώρηση παρουσιάστηκε από τον Conversy και επεκτάθηκε από τους Chaloub και Kelly. Τα συμπεράσματα αυτής της θεώρησης παρουσιάζονται από τον Kelly. Η θεώρηση βασίζεται στην γραμμική ελαστική θεωρία με τις παραδοχές ότι σημεία σε κατακόρυφες ευθείες βρίσκονται σε παραβολή μετά την παραμόρφωση και ότι σε κάθε σημείο του όγκου οι ορθές τάσεις έχουν την ίδια τιμή $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p(x, y)$. Επιπλέον η συμπιεστότητα του ελαστικού μπορεί να ληφθεί υπόψη κατά την επίλυση. Οι συνοριακές συνθήκες είναι ότι οι άνω και κάτω επιφάνειες της στρώσης είναι συγκολλημένες σε άκαμπτες πλάκες.

Στον ακόλουθο πίνακα φαίνονται τα αποτελέσματα αυτής της θεώρησης για το μέτρο συμπιεστότητας E_c^∞ της στρώσης ελαστικού με παραδοχή ασυμπίεστου υλικού

Πίνακας 4-3 Μέτρο Συμπιεστότητας Στρώσης Ασυμπίεστου Ελαστικού

Απειρομήκης λωρίδα πλάτους b	Κυκλική στρώση διαμέτρου Φ	Τετραγωνική στρώση πλευράς a
$E_c^\infty = 4GS^2$	$E_c^\infty = 6GS^2$	$E_c^\infty = 6.73GS^2$

Η επίδραση της συμπιεστότητας του ελαστικού μειώνει το μέτρο συμπιεστότητας της στρώσης από E_c^∞ σε E_c . Η επίδραση αυτή είναι ισχυρότερη όσο αυξάνει ο συντελεστής σχήματος της στρώσης. Εάν ληφθεί υπόψη η συμπιεστότητα του ελαστικού τότε προκύπτουν πολύπλοκες εκφράσεις για το μέτρο συμπιεστότητας υπό μορφή σειράς ή υπό μορφή συναρτήσεων Bessel. Στην βιβλιογραφία δίνονται προσεγγιστικές εκφράσεις οι οποίες αποτελούνται από τους δύο πρώτους όρους του αναπτύγματος των πολύπλοκων εκφράσεων για μικρούς συντελεστές σχήματος και δίνονται στον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας 4-4 Μέτρο Συμπιεστότητας Στρώσης Συμπιεστού Ελαστικού (Μέτρο Διόγκωσης K)

Απειρομήκης λωρίδα πλάτους $2b$	Κυκλική στρώση διαμέτρου Φ
$E_c = E_c^\infty \left(1 - \frac{6E_c^\infty}{5K}\right)$	$E_c = E_c^\infty \left(1 - \frac{4E_c^\infty}{3K}\right)$

όπου K είναι το μέτρο διόγκωσης του ελαστικού με τυπική τιμή τα 2000MPa. Ο πρώτος όρος του αναπτύγματος αντιστοιχεί στην λύση για ασυμπίεστο ελαστικό. Οι δύο αυτές εκφράσεις για στρώση συμπιεστού ελαστικού μπορούν να γραφούν προσεγγιστικά αν στην σχέση (4-4) αντικατασταθεί ο δεύτερος όρος με $6/(5K)$ και $4/(3K)$ αντίστοιχα.

Όταν το εφέδρανο υπόκειται σε κατακόρυφη θλίψη τότε λόγω της πλευρικής διόγκωσης δημιουργείται διατμητική παραμόρφωση η οποία προστίθεται στην διατμητική παραμόρφωση λόγω οριζόντιας μετακίνησης. Η μέγιστη τιμή της διατμητικής παραμόρφωσης λόγω κατακόρυφης συμπίεσης γ_c εμφανίζεται στις ακραίες παρειές της στρώσης και δίνεται για την περίπτωση κυκλικής στρώσης για ασυμπίεστο και συμπιεστό ελαστικό αντίστοιχα από τις παρακάτω σχέσεις :

$$\gamma_c^\infty = 6S\varepsilon_c \text{ και } \gamma_c = \gamma_c^\infty \left(1 + \frac{E_c^\infty}{3}\right) \quad (4-5)$$

Η πρώτη σχέση είναι ακριβής ενώ η δεύτερη είναι προσεγγιστική.

Όπου ε_c είναι η κατακόρυφη θλιπτική παραμόρφωση λόγω του θλιπτικού κατακόρυφου φορτίου. Αν δ είναι η κατακόρυφη μετατόπιση του εφεδράνου τότε ισχύει

$$\varepsilon_c = \frac{\delta}{t_r} \quad (4-6)$$

4.4 Συμπεριφορά σε Κάμψη

Αν το ελαστομεταλλικό εφέδρανο αποτελείται από n στρώσεις ελαστικού πάχους t και υποβάλλεται σε καθαρή κάμψη τότε η δυσκαμψία σε καμπτική στροφή των άκρων δίνεται κατ' αναλογία με την θεωρία δοκών ως :

$$K_b = \frac{(EI)_{eff}}{t} \frac{1}{n} = \frac{(EI)_{eff}}{t_r} \quad (4-7)$$

όπου $(EI)_{eff}$ είναι η καμπτική δυσκαμψία της μιας στρώσης ελαστικού. Η καμπτική δυσκαμψία στρώσεων ελαστικού μπορεί να υπολογιστεί με παρόμοια θεώρηση όπως η 2^η θεώρηση για τον υπολογισμό του μέτρου συμπιεστότητας. Στον ακόλουθο πίνακα φαίνονται τα αποτελέσματα αυτής της θεώρησης για την καμπτική δυσκαμψία $(EI)_{eff}^{\infty}$ της στρώσης ελαστικού με την παραδοχή ασυμπίεστου υλικού.

Πίνακας 4-5 Καμπτική Δυσκαμψία Στρώσης Ασυμπίεστου Ελαστικού

Απειρομήκης λωρίδα πλάτους $2b$ $\left(I = \frac{2b^3}{3}\right)$	Κυκλική στρώση διαμέτρου Φ $\left(I = \frac{\pi\Phi^4}{64}\right)$	Τετραγωνική στρώση πλευράς a $\left(I = \frac{a^4}{12}\right)$
$(EI)_{eff}^{\infty} = E_c^{\infty} \left(\frac{1}{5}I\right)$	$(EI)_{eff}^{\infty} = E_c^{\infty} \left(\frac{1}{3}I\right)$	$(EI)_{eff}^{\infty} = E_c^{\infty} (0.329I)$

όπου I είναι η ροπή αδράνειας της επιφάνειας κάθε στρώσης σε κάτοψη. Η μειωμένη τιμή της καμπτικής δυσκαμψίας σε σχέση με την τιμή EI της θεωρίας δοκών οφείλεται στο ότι η κατανομή της πίεσης έχει μορφή κυβικής παραβολής έναντι της γραμμικής κατανομής κατά την θεωρία δοκών.

Ομοίως εάν ληφθεί υπόψη η συμπιεστότητα του ελαστικού τότε προκύπτουν πολύπλοκες εκφράσεις για την καμπτική δυσκαμψία υπό μορφή σειράς ή υπό μορφή συναρτήσεων Bessel. Στην συνέχεια δίνονται προσεγγιστικές εκφράσεις οι οποίες αποτελούνται από τους δύο πρώτους όρους του αναπτύγματος των πολύπλοκων εκφράσεων για μικρούς συντελεστές σχήματος.

Πίνακας 4-6 Καμπτική Δυσκαμψία Στρώσης Συμπίεστου Ελαστικού (Μέτρο Διόγκωσης K)

Απειρομήκης λωρίδα πλάτους $2b$	Κυκλική στρώση διαμέτρου Φ
$(EI)_{eff} = (EI)_{eff}^{\infty} \left(1 - \frac{E_c^{\infty}}{3.5K}\right)$	$(EI)_{eff} = (EI)_{eff}^{\infty} \left(1 - \frac{E_c^{\infty}}{2K}\right)$

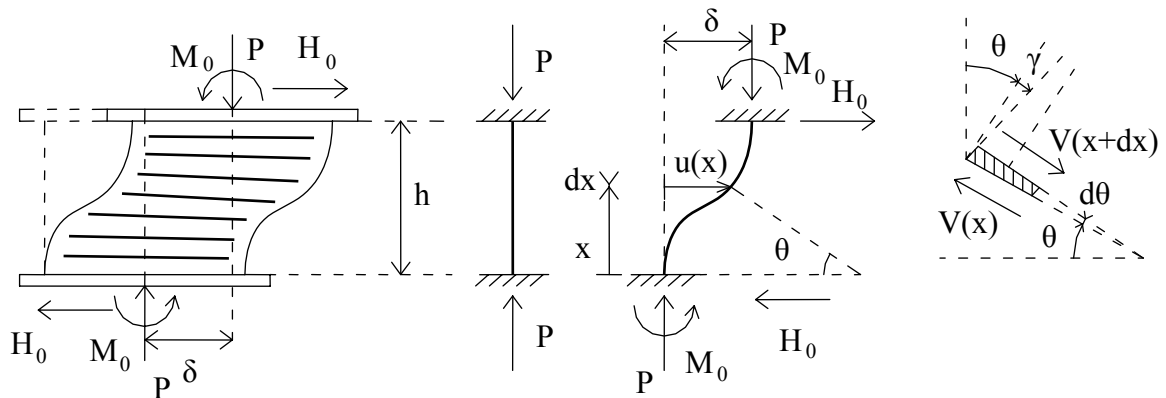
όπου K είναι το μέτρο διόγκωσης του ελαστικού με τυπική τιμή τα 2000MPa. Ο πρώτος όρος του αναπτύγματος αντιστοιχεί στην λύση για ασυμπίεστο ελαστικό.

4.5 Ανάλυση Ευστάθειας Ελαστομεταλλικών Εφεδράνων

Ένα ελαστομεταλλικό εφέδρανο πολλών στρώσεων είναι πιθανό να εμφανίσει απώλεια της ευστάθειας του (λυγισμός) κατά την οποία κυριαρχεί η μικρή διατμητική δυσκαμψία του. Η ανάλυση της απώλειας της ευστάθειας του εφεδράνου θεωρώντας το ως ένα σύνθετο συνεχές μέσο, μπορεί να γίνει με ανάλογο τρόπο με την ελαστική ανάλυση της ευστάθειας των δοκών (λυγισμός Euler). Επιπρόσθετα εξετάζεται και η επίδραση των διατμητικών παραμορφώσεων με την θεώρηση ότι επίπεδες και κάθετες διατομές στον απαραμόρφωτο διαμήκη άξονα παραμένουν μετά την παραμόρφωση του επίπεδες αλλά όχι κατ' ανάγκη κάθετες σε αυτόν.

4.5.1 Ευστάθεια Εφεδράνου χωρίς Επιβεβλημένες Πλευρικές Μετακινήσεις (Λυγισμός στην Απαραμόρφωτη Θέση)

Αν h είναι το συνολικό ύψος του εφεδράνου (ολικό πάχος στρώσεων t_r ελαστικού συν το πάχος των μεταλλικών φύλλων) τότε το εφέδρανο μπορεί να θεωρηθεί ως υποστύλωμα μήκους h με επιφάνεια διατομής την επιφάνεια του συγκολλημένου ελαστικού A όπως εικονίζεται στο Σχήμα 4-4. Οι συνήθεις συνθήκες στήριξης των ελαστομεταλλικών εφεδράνων περιλαμβάνουν απαγόρευση της στροφής των άνω και κάτω επιφανειών. Το εφέδρανο παραμένει αμετακίνητο πλευρικά μέχρι το κρίσιμο στάδιο του λυγισμού όπου η άνω επιφάνεια μπορεί να μετακινείται πλευρικά.



Σχήμα 4-4 Λυγισμός Εφεδράνου χωρίς Επιβεβλημένες Πλευρικές Μετακινήσεις

Θεωρούμε την ισορροπία ενός απειροστού τμήματος μήκους dx στο κρίσιμο στάδιο του λυγισμού. Η κάτω παρειά του απειροστού τμήματος στρέφεται κατά γωνία θ λόγω της παραμόρφωσης του μέρους του υποστύλωματος μέχρι την θέση x . Η άνω παρειά του απειροστού τμήματος στρέφεται κατά επιπλέον γωνία $d\theta$ λόγω της κάμψης του τμήματος. Ακόμα το τμήμα υποβάλλεται σε διατμητική παραμόρφωση γ λόγω της τέμνουσας δύναμης V . Αν $u(x)$ είναι οι πλευρικές μετακινήσεις κατά μήκος υποστύλωματος τότε η κλίση στην θέση x είναι :

$$\frac{du}{dx} = \theta + \gamma \quad (4-8)$$

Επιπλέον η διατμητική παραμόρφωση γ συνδέεται με την αντίστοιχη διατμητική τάση τ μέσω του μέτρου διάτμησης του υλικού G ως εξής :

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{V}{A_s G} \quad (4-9)$$

όπου $A_s = A \frac{h}{t_r}$ είναι η ενεργός διατμητική επιφάνεια η οποία είναι μεγαλύτερη από την

επιφάνεια διατομής A έτσι ώστε να ληφθεί υπόψη το γεγονός ότι οι μεταλλικές πλάκες δεν παραμορφώνονται διατμητικά. Εντελώς ανάλογα προσαυξάνεται και η καμπτική

δυσκαμψία του εφεδράνου σε $(EI)_{eff,s} = (EI)_{eff} \frac{h}{t_r}$.

Η διατμητική δύναμη V στην παρειά του απειροστού στοιχείου παράγεται από την κατακόρυφη δύναμη P σύμφωνα με την σχέση :

$$V = P \sin \theta = P\theta \quad (4-10)$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις (4-8), (4-9) και (4-10) ισχύει :

$$\frac{du}{dx} = \theta \left(1 + \frac{P}{A_s G} \right) \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2 u}{dx^2} \bigg/ \left(1 + \frac{P}{A_s G} \right) \quad (4-11)$$

Η καταστατική σχέση ροπών-καμπυλοτήτων του υποστυλώματος μπορεί να γραφεί θεωρώντας την ισορροπία κατά το κρίσιμο στάδιο του λυγισμού ως εξής

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{(EI)_{eff,s}} = \frac{M_0 - Pu(x) - H_0(h-x)}{(EI)_{eff,s}} \quad (4-12)$$

Εισάγοντας την σχέση (4-11) έχουμε :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{P}{(EI)_{eff,s}} \left(1 + \frac{P}{A_s G} \right) u = \left(1 + \frac{P}{A_s G} \right) [M_0 - H_0(h-x)] \quad (4-13)$$

Η προηγούμενη σχέση αποτελεί την διαφορική εξίσωση ισορροπίας του υποστυλώματος. Κατά το κρίσιμο στάδιο λυγισμού το υποστυλώμα μπορεί να ισορροπεί και σε παραμορφωμένη θέση. Η απαίτηση αυτή οδηγεί στην παρακάτω εξίσωση για το κατακόρυφο φορτίο P :

$$P^2 + PP_S - P_S P_E = 0 \quad (4-14)$$

Έτσι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{crit} προκύπτει από την επίλυση ως προς P της προηγούμενης εξίσωσης.

$$P_{crit} = \frac{-P_S + \sqrt{P_S^2 + 4P_S P_E}}{2} \quad (4-15)$$

όπου P_E είναι το φορτίο ελαστικού λυγισμού Euler για το υποστυλώμα και ως P_S ορίζεται η διατμητική δυσκαμψία ανά μονάδα μήκους σύμφωνα με τις σχέσεις :

$$P_E = \frac{\pi^2 (EI)_s}{h^2} \quad \text{και} \quad P_S = GA_s \quad (4-16)$$

Η προηγούμενη σχέση μπορεί να απλοποιηθεί αν υποθεθεί ότι $P_E \gg P_S$ όπως συμβαίνει συνήθως για τα τυπικά εφέδρανα.

$$P_{crit} = \sqrt{P_S P_E} \quad (4-17)$$

Τελικά το φορτίο λυγισμού ελαστομεταλλικού εφεδράνου στην απαραμόρφωτη θέση δίνεται από την σχέση :

$$P_{crit} = \sqrt{GA \frac{h}{t_r} \cdot \frac{\pi^2 (EI)_{eff}}{h^2} \frac{h}{t_r}} = \sqrt{GA \frac{\pi^2 (EI)_{eff}}{t_r^2}} \quad (4-18)$$

Ο συντελεστής ασφαλείας έναντι ελαστικού λυγισμού στην απαραμόρφωτη θέση δίνεται από την σχέση :

$$SF_b = \frac{P_{crit}}{P} \quad (4-19)$$

Ικανοποιητικός συντελεστής ασφαλείας έναντι λυγισμού στην απαραμόρφωτη θέση (π.χ. $SF_b > 2.5$) πρέπει να εξασφαλίζεται για τις μη σεισμικές φορτίσεις όπου το εφέδρανο δεν μετατοπίζεται πλευρικά. Για τις συνήθεις διαστάσεις εφεδράνων και τα συνήθη κατακόρυφα φορτία ο ελαστικός λυγισμός στην απαραμόρφωτη θέση δεν αποτελεί πρόβλημα για τον σχεδιασμό.

Ένα απροσδόκητο συμπέρασμα είναι το ότι ο λυγισμός των εφεδράνων αποτελεί πρόβλημα για τα συστήματα σεισμικής μόνωσης με μικρό συνολικό κατακόρυφο φορτίο. Το γεγονός αυτό μπορεί να εξηγηθεί από τις προηγούμενες σχέσεις μέσω της παρακάτω απλοποιητικής θεώρησης. Έστω ένα σύστημα σεισμικής μόνωσης το οποίο αποτελείται από ένα μόνο κυκλικό ελαστομεταλλικό εφέδρανο. Η καμπτική δυσκαμψία του εφεδράνου αγνοώντας την συμπίεστικότητα του ελαστικού γράφεται ως εξής :

$$(EI)_{eff} = \frac{E_c I}{3} = \frac{E_c}{3} \frac{\pi \Phi^4}{64} = \frac{E_c A}{t_r} \frac{t_r A}{12\pi} = K_V \frac{t_r A}{12\pi} \quad (4-20)$$

όπου $K_V = E_c A / t_r$ είναι η κατακόρυφη δυσκαμψία του εφεδράνου. Επιπλέον αν αντικατασταθεί η οριζόντια δυσκαμψία του εφεδράνου $K_H = GA / t_r$ τότε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού στην απαραμόρφωτη θέση γίνεται :

$$P_{crit} = \sqrt{GA \frac{\pi^2 (EI)_{eff}}{t_r^2}} = \sqrt{K_H \frac{\pi^2 (EI)_{eff}}{t_r}} = \sqrt{K_H K_V \frac{\pi A}{12}} \quad (4-21)$$

Τότε ο συντελεστής ασφαλείας έναντι λυγισμού στην απαραμόρφωτη θέση SF_b γράφεται συναρτήσει της οριζόντιας ιδιοσυχνότητας $\omega_H^2 = gK_H/P$, της κατακόρυφης ιδιοσυχνότητας $\omega_V^2 = gK_V/P$ και της κατακόρυφης πίεσης $p = P/A$ ως εξής :

$$SF_b = \frac{P_{crit}}{P} = \sqrt{\frac{K_H K_V}{P^2} \frac{\pi A}{12}} = \sqrt{\frac{\pi}{12g^2} \frac{K_H g}{P} \frac{K_V g}{P} \frac{A}{P}} P \Rightarrow SF_b = \frac{\omega_H \omega_V}{g} \sqrt{\frac{\pi}{12p}} \sqrt{P} \quad (4-22)$$

Παρατηρούμε ότι για δεδομένη οριζόντια ιδιοσυχνότητα ω_H , κατακόρυφη ιδιοσυχνότητα ω_V και κατακόρυφη πίεση p , όσο μειώνεται το κατακόρυφο φορτίο P τόσο μειώνεται και ο συντελεστής ασφάλειας έναντι λυγισμού SF_b . Το προηγούμενο συμπέρασμα θα μπορούσε να γενικευθεί για συστήματα σεισμικής μόνωσης με μικρό συνολικό κατακόρυφο φορτίο. Ο λυγισμός περιορίζει την αποδοτικότητα αυτών των συστημάτων αφού η ιδιοπερίοδος του συστήματος σεισμικής μόνωσης που μπορεί να επιτευχθεί είναι σχετικά μικρή. Το φαινόμενο αυτό δεν κρίσιμο κατά την σεισμική μόνωση των συνήθων κτηρίων. Αντίθετα κάνει απαγορευτική την χρήση ελαστομεταλλικών εφεδράνων για την σεισμική μόνωσης ελαφριών αντικειμένων όπως εκθέματα μουσείων.

4.5.2 Ευστάθεια Εφεδράνου με Επιβεβλημένες Πλευρικές Μετακινήσεις (Λυγισμός στην Παραμορφωμένη Θέση)

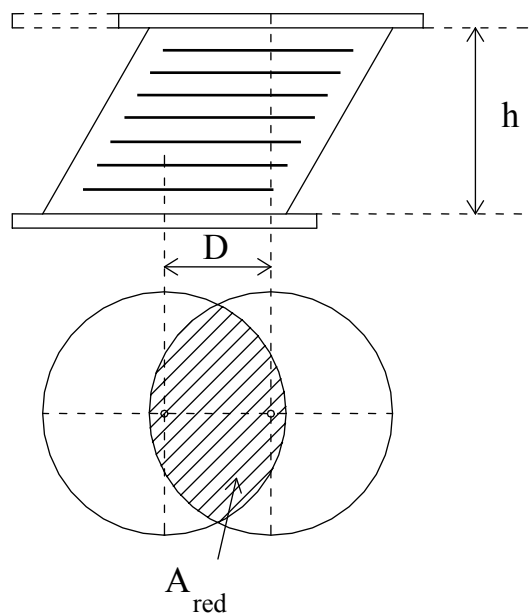
Η αλληλεπίδραση κατακόρυφου φορτίου P και οριζόντιας μετατόπισης D μπορεί να οδηγήσει σε αστάθεια στην παραμορφωμένη θέση του εφεδράνου για μικρότερο κρίσιμο φορτίο λυγισμού σε σχέση με τον λυγισμό στην απαραμόρφωτη θέση. Η ακριβής εκτίμηση της συμπεριφοράς του εφεδράνου σε συνδυασμό κατακόρυφου φορτίου P και οριζόντιας μετατόπισης D απαιτεί πολύπλοκη μη γραμμική ανάλυση. Αντίθετα πιο απλές ημι-εμπειρικές προσεγγίσεις οδηγούν σε συντηρητικά αποτελέσματα τα οποία όμως είναι αρκετά ακριβή και επιβεβαιώνονται και πειραματικά.

Υπάρχουν δύο απλές υποθέσεις για την αλληλεπίδραση κατακόρυφου φορτίου P και οριζόντιας μετατόπισης D . Η πρώτη είναι ότι η αστάθεια εμφανίζεται για φορτίο λυγισμού $P_{crit}' < P_{crit}$ έτσι ώστε η κατακόρυφη πίεση στην απομειωμένη επιφάνεια κάτοψης A_{red} να είναι ίση με την αντίστοιχη πίεση κατά τον λυγισμό στην απαραμόρφωτη θέση. Συνεπώς κατά την πρώτη υπόθεση το κρίσιμο φορτίο λυγισμού στην παραμορφωμένη θέση δίνεται από την σχέση :

$$\frac{P_{crit}'}{A_{red}} = \frac{P_{crit}}{A} \Rightarrow \frac{P_{crit}'}{P_{crit}} = \frac{A_{red}}{A} \quad (4-23)$$

Η δεύτερη υπόθεση θεωρεί ότι η αστάθεια εμφανίζεται για φορτίο λυγισμού $P_{crit}' < P_{crit}$ το οποίο προκύπτει από την έκφραση του φορτίου λυγισμού στην απαραμόρφωτη θέση αν αντικατασταθεί η επιφάνεια διατομής A με την απομειωμένη επιφάνεια κάτοψης A_{red} . Έτσι κατά την δεύτερη υπόθεση ισχύει

$$P_{crit}' = \sqrt{GA_{red} \frac{\pi^2 (EI)_{eff}}{t_r^2}} = \sqrt{\frac{A_{red}}{A}} \cdot P_{crit} \Rightarrow \frac{P_{crit}'}{P_{crit}} = \sqrt{\frac{A_{red}}{A}} \quad (4-24)$$



Σχήμα 4-5 Απομειωμένη Επιφάνεια Κάτοψης A_{red}

Παρατηρούμε ότι και για τις δύο υποθέσεις το κρίσιμο φορτίο λυγισμού στην παραμορφωμένη θέση P_{crit} μηδενίζεται όταν μηδενίζεται η απομειωμένη επιφάνεια κάτοψης A_{red} δηλαδή όταν η οριζόντια μετατόπιση D γίνει ίση με την διάσταση του εφεδράνου.

Η απομειωμένη επιφάνεια A_{red} προκύπτει συναρτήσει της οριζόντιας μετατόπισης D για κάθε κάτοψη εφεδράνου. Για ορθογωνικό εφεδράνο $a \times b$ με οριζόντια μετατόπιση D παράλληλη στην πλευρά a ισχύει :

$$A_{red} = b(a - D) \Rightarrow \frac{A_{red}}{A} = 1 - \frac{D}{a} \quad (4-25)$$

Για εφεδράνο κυκλικής διατομής διαμέτρου Φ ο προσδιορισμός της απομειωμένης επιφάνειας A_{red} είναι πιο δύσκολος και τελικά δίνεται από την σχέση

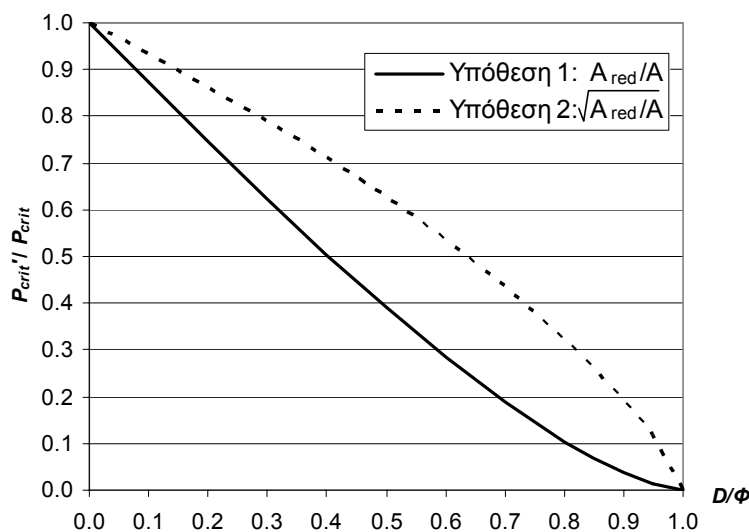
$$\frac{A_{red}}{A} = \frac{\theta - \sin \theta}{\pi} \quad \text{όπου} \quad \theta = 2 \cos^{-1} \left(\frac{D}{\Phi} \right) \quad (\theta \text{ σε rad}) \quad (4-26)$$

Ο Πίνακας 4-7 και το Σχήμα 4-6 παρουσιάζουν την μεταβολή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού στην παραμορφωμένη θέση P_{crit} κυκλικού εφεδράνου διαμέτρου Φ συναρτήσει της οριζόντιας μετακίνησης D για τις δύο παραπάνω υποθέσεις.

Πίνακας 4-7 Απομειωμένη Επιφάνεια Κάτοψης A_{red} Κυκλικού Εφεδράνου (Αδιαστατοποιημένη)

D/Φ	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
A_{red}/A	1.000	0.873	0.747	0.624	0.505	0.391	0.285	0.188	0.1041	0.0681	0.0374	0.0133	0.0000
$\sqrt{A_{red}/A}$	1.000	0.934	0.864	0.790	0.710	0.625	0.534	0.434	0.323	0.261	0.193	0.115	0.000

Μια σειρά από πειραματικά δεδομένα σε μικρά ελαστομεταλλικά εφεδράνα έδειξαν ότι η δεύτερη υπόθεση είναι η πιο κατάλληλη. Η πρώτη υπόθεση ήταν υπερβολικά συντηρητική. Αντίθετα η δεύτερη υπόθεση, αν και επίσης συντηρητική, ήταν αρκετά ακριβής για το εύρος φορτίων και μετατοπίσεων που εμφανίζονται στην πράξη.



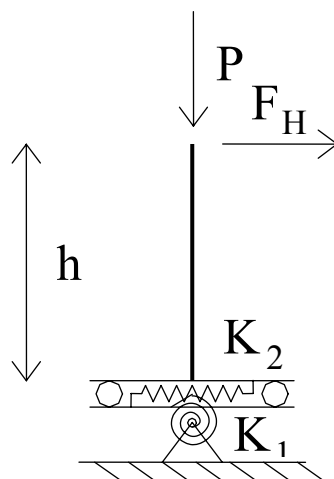
Σχήμα 4-6 Κρίσιμο Φορτίο Λυγισμού Κυκλικού Εφεδράνου στην Παραμορφωμένη Θέση P_{crit}' Συναρτήσει της Οριζόντιας Μετατόπισης D

4.6 Επίδραση Κατακόρυφου Φορτίου στην Συμπεριφορά των Ελαστομεταλλικών Εφεδράνων

Η επίδραση του κατακόρυφου αξονικού φορτίου στα ελαστομεταλλικά εφέδρανα έχει τις ακόλουθες συνέπειες

- Μείωση της οριζόντιας ακαμψίας
- Κατακόρυφη βύθιση κατά την οριζόντια μετατόπιση
- Αύξηση του βαθμού απόσβεσης

Το απλό μοντέλο που παρουσιάζεται παρακάτω περιγράφει τα δύο πρώτα φαινόμενα με ικανοποιητική ακρίβεια. Το μοντέλο αποτελείται από ένα άκαμπτο υποστύλωμα ύψους h το οποίο στηρίζεται στην βάση του μέσω οριζόντιου μετατοπισιακού ελατηρίου ακαμψίας K_2 και στροφικού ελατηρίου σταθεράς K_1 (Σχήμα 4-7). Το υποστύλωμα υποβάλλεται σε κατακόρυφο αξονικό φορτίο P και οριζόντια δύναμη F_H .



Σχήμα 4-7 Απλοποιητικό Μοντέλο για την Περιγραφή της Επίδρασης του Κατακόρυφου Φορτίου

Οι ακαμψίες των δύο ελατηρίων επιλέγονται έτσι ώστε να αντιστοιχούν σε φυσικές ιδιότητες του ελαστομεταλλικού εφεδράνου. Έτσι η στρωφική ακαμψία K_I επιλέγεται έτσι ώστε το απλοϊκό μοντέλο να είναι ασταθές για κατακόρυφο φορτίο P ίσο με το φορτίο λυγισμού Euler του εφεδράνου P_E . Δηλαδή $K_I = P_E h$. Επιπλέον η οριζόντια ακαμψία K_2 επιλέγεται ίση με την οριζόντια ακαμψία του ελαστομεταλλικού εφεδράνου K_H . Δηλαδή $K_2 = GA/t_r$.

Οι εξισώσεις ισορροπίας του μοντέλου στην παραμορφωμένη θέση οδηγούν στην ακόλουθη μειωμένη οριζόντια ακαμψία K_H^* λόγω της επίδρασης του αξονικού φορτίου.

$$K_H^* = K_H \left[1 - \left(\frac{P}{P_{crit}} \right)^2 \right] \quad (4-27)$$

Στην πράξη το κατακόρυφο φορτίο P είναι αρκετά μικρότερο από το κρίσιμο φορτίο λυγισμού στην απαραμόρφωτη θέση P_{crit} έτσι ώστε η απομείωση της οριζόντια ακαμψίας να μην είναι σημαντική. Για παράδειγμα αν το κατακόρυφο φορτίο P είναι μικρότερο από 0.32 φορές το P_{crit} τότε η απομείωση της οριζόντιας ακαμψίας είναι μικρότερη από 10%.

Η κατακόρυφη βύθιση δ_V κατά την οριζόντια μετατόπιση D του απλοποιητικού μοντέλου δίνεται από την σχέση :

$$\delta_V = \frac{P_s + P}{P_E} \frac{D^2}{h} \quad (4-28)$$

όπου P_E είναι το φορτίο ελαστικού λυγισμού Euler για το υποστύλωμα και P_s η διατμητική δυσκαμψία ανά μονάδα μήκους σύμφωνα με τις σχέσεις (4-29). Αυτή η βύθιση επαλληλίζεται στην βύθιση λόγω της αξονικής συμπίεσης του εφεδράνου από το φορτίο P . Προκαλείται από την περιστροφή των μεταλλικών πλακών ενίσχυσης στο κέντρο του ελαστομεταλλικού εφεδράνου στην μετατοπισμένη θέση. Η περιστροφή αυτή παράγει διατμητικές τάσεις από την συνιστώσα του κατακόρυφου φορτίου P η οποία είναι παράλληλη στις μεταλλικές πλάκες και συνεπαγόμενες διατμητικές παραμορφώσεις που οδηγούν στην κατακόρυφη βύθιση δ_V .

Η κατακόρυφη βύθιση κατά την οριζόντια μετατόπιση θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη στις περιπτώσεις όπου γίνεται παράλληλη χρήση ελαστομεταλλικών εφεδράνων σεισμικής μόνωσης και μονωτήρων ολίσθησης. Αν οι δύο προηγούμενοι τύποι σεισμικών μονωτήρων χρησιμοποιούνται σε μικρή απόσταση μεταξύ τους και κάτω από άκαμπτα στην κατακόρυφη διεύθυνση δομικά στοιχεία τότε η τάση για διαφορετική κατακόρυφη βύθιση κατά την οριζόντια μετατόπιση μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικές ανακατανομές των κατακόρυφων φορτίων.